

EENIGE TRILLINGSVERSCHIJNSELEN IN EEN NIET-LINEAIR CIRCUIT

door

G. J. ELIAS en H. MIEDEMA

Eenige trillingsverschijnselen in een circuit, bestaande uit een serieschakeling van C , R en (niet-lineaire) zelfinductie.

Samenvatting.

In dit artikel wordt getracht het gedrag van bovengenoemd circuit onder invloed van een sinusvormige stoorspanning, te berekenen.

In het bijzonder worden beschouwd het kipverschijnsel en de trillingstoestand, waarbij onder harmonischen van de frequentie der aangelegde wisselspanning optreden.

Inleiding.

Werkt op een circuit, gevormd door de serieschakeling van weerstand, capaciteit en (niet-lineaire) zelfinductie een sinusvormige stoorspanning, dan blijkt het gedrag van dit circuit onder omstandigheden sterk af te wijken van dat van hetzelfde circuit met (lineaire) zelfinductie.

Deze afwijking van gedrag uit zich voornamelijk in het optreden van het kipverschijnsel en van onderharmonischen der wisselspanningsfrequentie in de periodiek veranderlijken (flux, stroomsterkte en de afgeleiden).

Laat men de amplitude van de wisselspanning geleidelijk veranderen, dan zal, bij gunstige dimensionering van het circuit, bij het bereiken van een zekere spanning een plotselinge verandering in de trillingstoestand optreden, die op een oscillograaf is waar te nemen als een verspringen van vorm en fase der periodiek veranderlijken.

Aan het typische verspringen van de eene trillingstoestand in de andere ontleent dit verschijnsel zijn naam „Kipverschijnsel”.

Verder is in het circuit een trillingstoestand mogelijk, waarbij de periodiek veranderlijken een derde onderharmonische van de frequentie der aangelegde wisselspanning bevatten.

Het optreden van de derde onderharmonische is afhankelijk van het inschakelmoment. Ze ontstaat bijv. indien de wisselspanning op een gunstig moment van de periode wordt ingeschakeld. Ook het optreden van het kipverschijnsel kan de oorzaak zijn van het ontstaan der derde subharmonische.

Oneven subharmonischen van een hogere rangorde zijn niet waargenomen.

Is in hetzelfde circuit de doorloopen hysteresislus asymmetrisch, hetgeen bereikt kan worden door voormagnetisatie van de kern der spoel met gelijkstroom, dan kunnen even onderharmonischen optreden. In tegenstelling met de derde onderharmonische, treden de even onderharmonischen spontaan op, zoodra de instelling van het circuit daarvoor gunstig gekozen wordt.

In de berekening wordt alleen de tweede onderharmonische beschouwd. Bij bepaalde instellingen binnen het gebied der tweede onderharmonische blijkt bovendien de vierde onderharmonische op te treden.

In het volgende zal getracht worden te berekenen, binnen welke grenzen deze verschijnselen zich kunnen voordoen en op welke wijze de amplitudo der periodiek veranderlijken afhangt van de wisselspanningsamplitudo. Er is steeds naar gestreefd de berekening zoo nauw mogelijk te doen aansluiten bij het resultaat der metingen, teneinde allereerst eenig inzicht te verkrijgen in het verloop der verschijnselen.

De periodiek veranderlijken worden geschreven als reeksen van Fourier met een beperkt aantal termen. Dit maakt het mogelijk om de invloed der hysteresis, en bij het kipverschijnsel ook nog de invloed van den weerstand in rekening te brengen.

Tengevolge van de gebruikte rekenmethode kan alleen de stationaire toestand beschouwd worden en is het bijv. niet mogelijk de invloed van het inschakelmoment op het ontstaan der derde onderharmonische na te gaan.

§ 1. *Benadering hysteresislus.*

Het is gebleken dat de hysteresislus op eenvoudige wijze benaderd kan worden, indien de magnetische inductie B een periodieke functie van de tijd is, dus in de vorm van een reeks van Fourier is te schrijven.

$$\text{Is nl.} \quad B = B_0 + \hat{B}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{B}_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots \quad (1)$$

dan wordt de hysteresislus gegeven door eliminatie van t uit deze reeks en de formule:

$$H = \nu_1 B + \nu_3 B^3 + \nu_5 B^5 + \dots + \\ + \varrho \{ \hat{B}_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{B}_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots \} \quad (2)$$

Hierin brengt de term

$$H'' = \varrho \{ \hat{B}_1 \cos(\omega t + \varphi) + \hat{B}_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots \}$$

de invloed van de hysteresis in rekening.

De grootheden $\nu_1, \nu_3, \nu_5, \dots$ en ϱ zijn materiaalconstanten, die bepaald kunnen worden uit de opgemeten hysteresislus van het materiaal.

Ter afkorting zullen we in het vervolg schrijven:

$$H'' = \varrho \left\{ \frac{\partial}{\partial(\omega t)} \hat{B}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \frac{\partial}{\partial(2\omega t)} \hat{B}_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots \right\} =$$

$$H'' = \varrho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial B}{\partial(n\omega t)} .$$

Aangezien bij de volgende berekeningen steeds gewerkt wordt met de grootheden ψ en i , zullen we deze in (2) invoeren.

Is van de zelfinductie l de lengte en S de doorsnede van het magnetisch circuit, λ de lengte van de luchtspleet, w het aantal windingen en ψ de omvatte flux, dan geldt:

$$\psi = B \cdot S \cdot w ,$$

$$H \cdot l + B \cdot \lambda = 4 \pi w \cdot i .$$

Met behulp van deze vergelijkingen is (2) te schrijven in den vorm:

$$i = \psi \cdot \frac{\lambda + \nu_1 l}{4 \pi S \cdot w^2} + \psi^3 \cdot \frac{\nu_3 l}{4 \pi S^3 w^4} + \psi^5 \cdot \frac{\nu_5 l}{4 \pi S^5 w^6} + \dots +$$

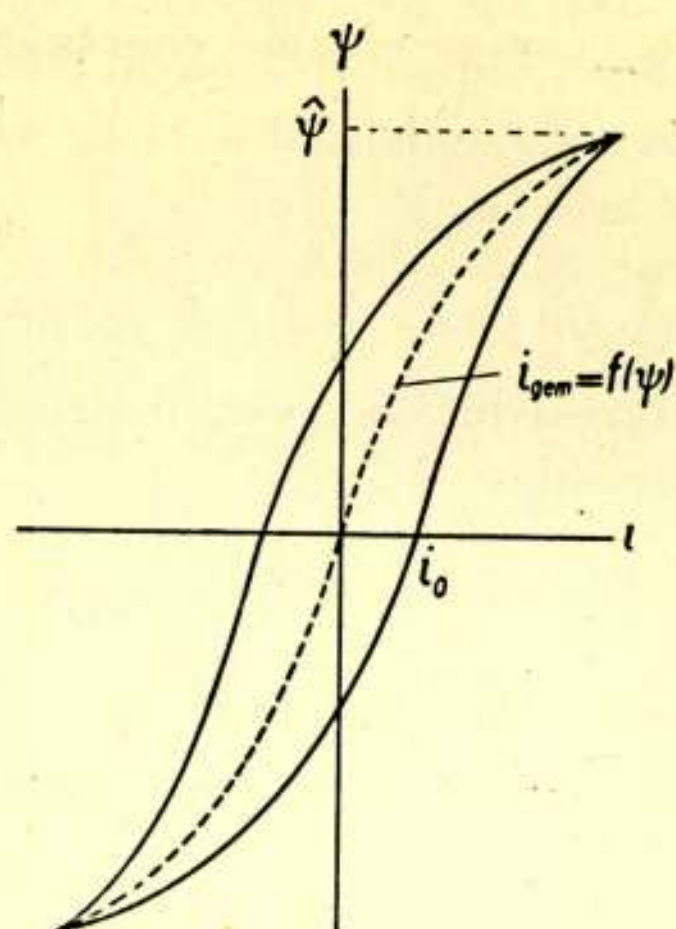


Fig. 1.
Hysteresislus volgens meting.

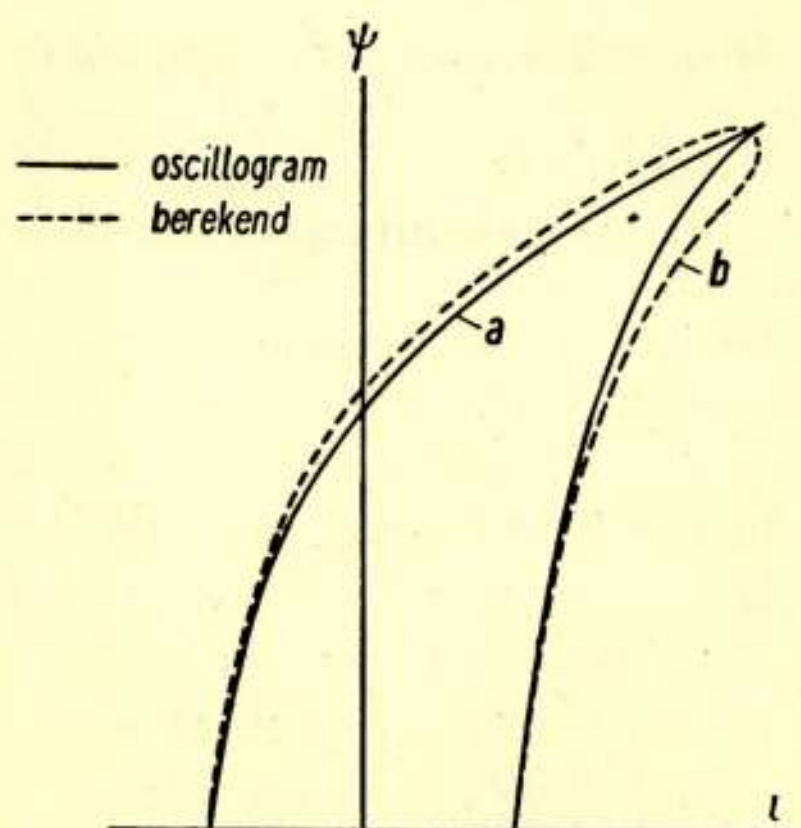


Fig. 2a en 2b.
Hysteresislus, indien geen
subharmonische aanwezig is.

$$+ \frac{\varrho l}{4 \pi S \omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial (n \omega t)}.$$

Of, na invoering van eenige nieuwe constanten:

$$i = \mu_1 \psi + \mu_3 \psi^3 + \mu_5 \psi^5 + \dots + v \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial (n \omega t)} \quad \left. \vphantom{\sum_{n=1}^{\infty}} \right\} (3)$$

Waarin: $\psi = \psi_0 + \hat{\psi}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{\psi}_2 \sin(2 \omega t + \varphi_2) + \dots$

(3) is de formule, die in de volgende berekeningen steeds gebruikt zal worden.

Voor een gegeven zelfinductie kan men de constanten $\mu_1, \mu_3, \mu_5 \dots$ en v bepalen uit het oscillogram van de $\psi - i$ lus, doorloopen als $\psi \approx \hat{\psi} \sin \omega t$. Voor deze $\psi - i$ lus nemen we aan:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \hat{\psi} \sin \omega t \\ i &= \mu_1 \psi + \mu_3 \psi^3 + \dots + v \cdot \hat{\psi} \cos \omega t. \end{aligned} \right\} (4)$$

De constanten $\mu_1, \mu_3, \mu_5 \dots$ worden nu bepaald door de kromme $i_{gem.} = f(\psi)$ (fig. 1) te benaderen met

$$i = \mu_1 \psi + \mu_3 \psi^3 + \mu_5 \psi^5 + \dots$$

De constante v kan bepaald worden uit de grootte van i voor $\psi = 0$ of uit de grootte van het oppervlak der $\psi = i$ lus.

Is $\psi = 0$, dan is volgens (4): $i_0 = v \cdot \hat{\psi}$. (Fig. 1)

Aangezien zoowel i_0 als $\hat{\psi}$ bekend zijn, is v direct te berekenen.

Het oppervlak der $\psi - i$ lus volgens (4) is:

$$\begin{aligned} F &= \oint i \cdot d\psi = \int_0^{2\pi} i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial (\omega t)} \cdot d(\omega t) = \\ &= \int_0^{2\pi} v \hat{\psi} \cos \omega t \cdot \hat{\psi} \cos \omega t \cdot d(\omega t) = \pi \cdot v \hat{\psi}^2. \end{aligned}$$

Wordt nu het oppervlak O van de $\psi - i$ lus uit fig. 1 bepaald, dan volgt de grootte van v uit $F = O$.

Zoolang de verzadiging niet te groot was, gaven beide methodes slechts weinig verschillende waarden van v .

Bij de berekeningen werd steeds die waarde van v genomen, die volgde uit de eerstgenoemde methode.

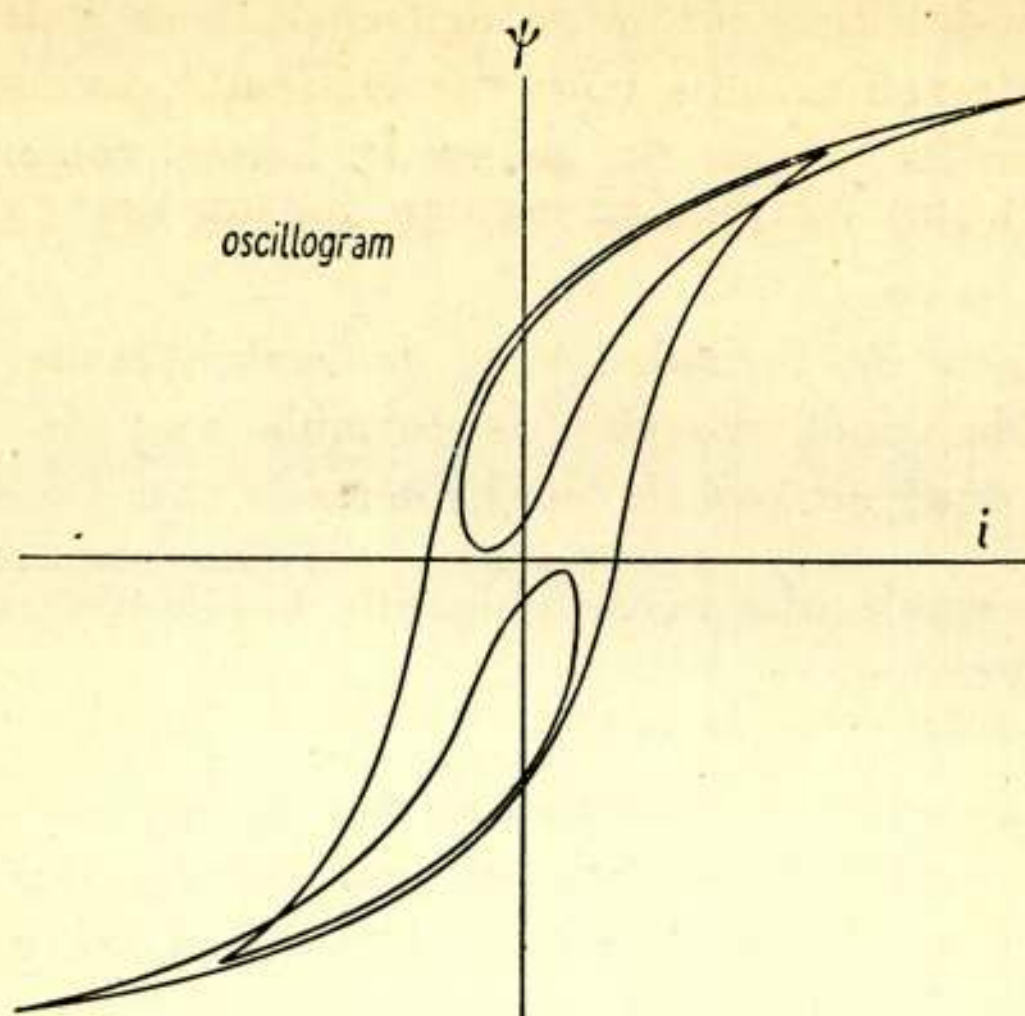


Fig. 3a.

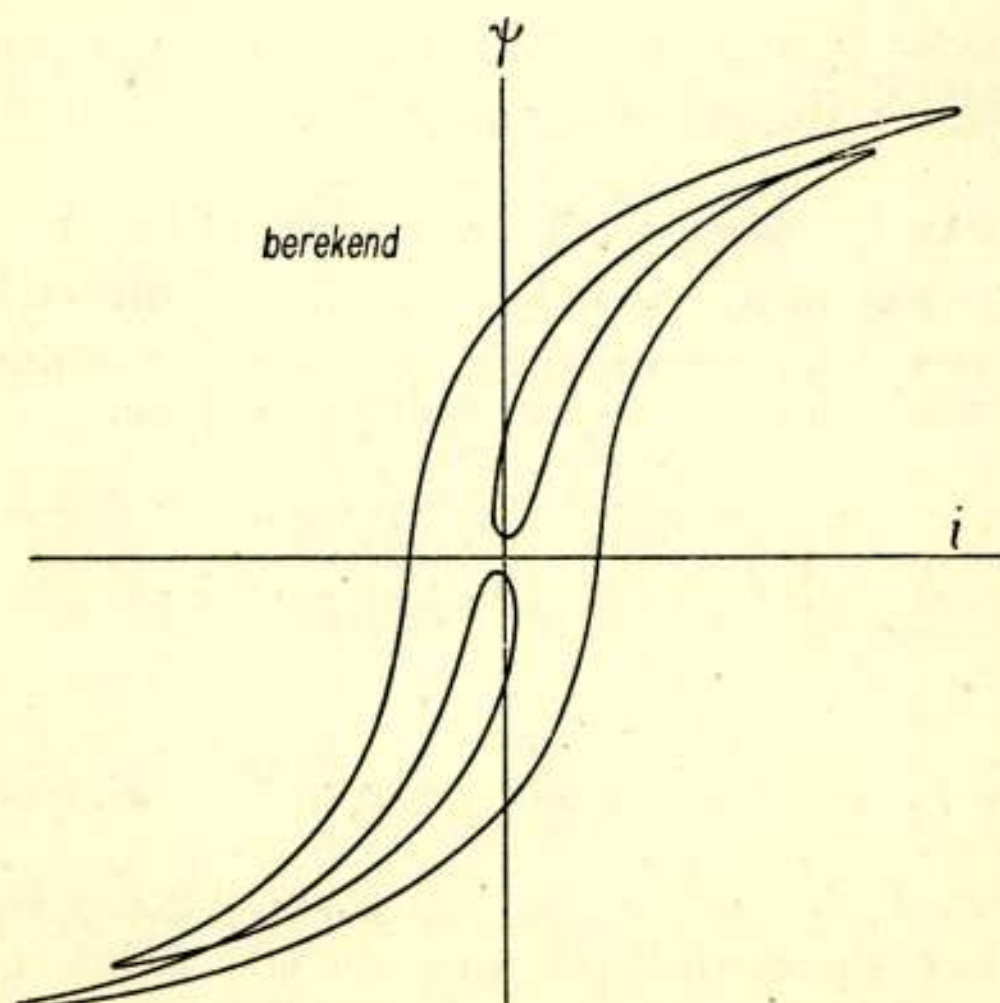


Fig. 3b.

Hysteresislus bij aanwezigheid
van derde subharmonische.

Ter verduidelijking zijn in de figuren 2, 3 en 4 de $\psi - i$ lussen van eenzelfde zelfinductie voor verschillende gevallen geteekend.

De figuren 2a, 3a en 4a geven de lussen volgens de oscillogrammen, terwijl de figuren 2b, 3b en 4b de lussen volgens formule (3) geven.

Hier volgen de formules voor de verschillende $\psi - i$ lussen, van eenzelfde spoel, waarbij de formule van de flux bepaald werd door analyse van de fluxkromme.

Fig. 2b $\psi = 3,55 \cdot 10^6 \sin \omega t$.

e. m. e.

$$i = 0,24 \cdot 10^{-10} \psi + 0,68 \cdot 10^{-23} \psi^3 + 0,42 \cdot 10^{-10} \frac{\partial \psi}{\partial (\omega t)} \text{ " " "}$$

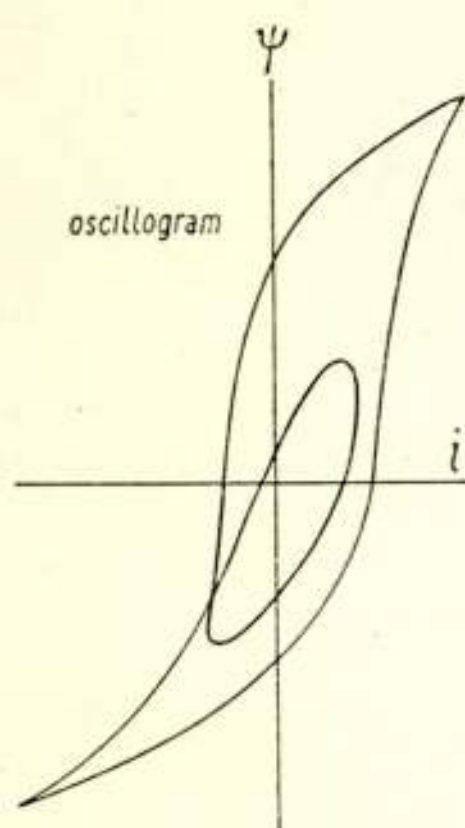


Fig. 4a.

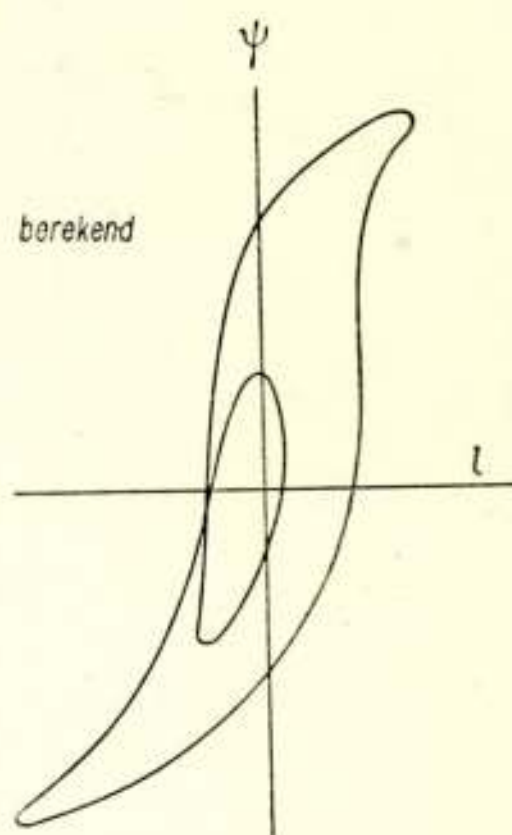


Fig. 4b.

Hysteresislus bij aanwezigheid van tweede subharmonische.

Fig. 3b $\psi = 2,9 \cdot 10^6 \sin (\frac{1}{3} \omega t - 5^\circ) + 2,75 \cdot 10^6 \sin \omega t$. *e. m. e.*

$$i = 0,24 \cdot 10^{-10} \psi + 0,52 \cdot 10^{-23} \psi^3 + 0,2 \cdot 10^{-36} \psi^5 + \\ + 0,35 \cdot 10^{-10} \sum_{n=1/3}^1 \frac{\partial \psi}{\partial (n \omega t)} \text{ e. m. e.}$$

Fig. 4b $\psi = (-0,73 \cdot 10^6) + 1,6 \cdot 10^6 \sin (\frac{1}{2} \omega t + 7,5^\circ) + \\ + 2,4 \cdot 10^6 \sin \omega t \text{ e. m. e.}$

$$i = 0,24 \cdot 10^{-10} \psi + 0,68 \cdot 10^{-23} \psi^3 + \\ + 0,45 \cdot 10^{-10} \sum_{n=1/2}^1 \frac{\partial \psi}{\partial (n \omega t)} \text{ e. m. e.}$$

In fig. 4 zijn de gelijkstroom componenten van ψ en i buiten beschouwing gelaten, aangezien deze op het oscillogram ook niet tot uiting kwamen.

Het verschil tusschen de waarden van μ_3 en v in de formules voor fig. 3b en beide andere figuren wordt veroorzaakt door de sterke verzadiging, die in de formule voor fig. 3b ook het invoeren van een vijfdegraads term noodzakelijk maakte.

§ 2. Kipverschijnsel.

Is u het potentiaalverschil tusschen de condensatorplaten in de richting van de stroom, dan geldt het circuit van fig. 5:

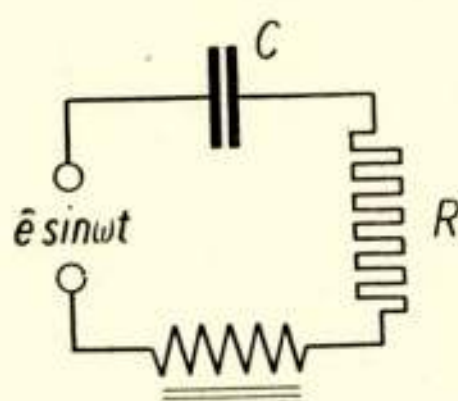


Fig. 5.

$$\frac{d\psi}{dt} + iR + u = \hat{e} \sin \omega t.$$

Of:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \omega \hat{e} \cos \omega t. \quad (1)$$

Hierin is:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= a_1 \sin \omega t + a_3 \sin 3\omega t + \dots + b_1 \cos \omega t + b_3 \cos 3\omega t + \dots \\ i &= c_1 \sin \omega t + c_3 \sin 3\omega t + \dots + d_1 \cos \omega t + d_3 \cos 3\omega t + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Vergelijking (1) is met gebruikmaking van (2) te splitsen in de volgende vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 a_1 + \omega R d_1 - \frac{c_1}{C} &= 0 \\ \omega^2 b_1 - \omega R c_1 - \frac{d_1}{C} &= -\omega \hat{e}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 (2n+1)^2 a_{2n+1} + \omega R (2n+1) d_{2n+1} - \frac{1}{C} c_{2n+1} &= 0, \\ \omega^2 (2n+1)^2 b_{2n+1} - \omega R (2n+1) c_{2n+1} - \frac{1}{C} d_{2n+1} &= 0 \end{aligned} \right\} n = 1 \div \infty \quad (4)$$

Voor het verband tusschen ψ en i nemen we:

$$i = \mu_1 \psi + \mu_3 \psi^3 + v \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial (n \omega t)}. \quad (5)$$

Uit (2) en (5) volgt:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \mu_1 a_1 + \frac{3}{4} \mu_3 a_1 (a_1^2 + b_1^2) + \mu_3 \left(-\frac{3}{4} a_1^2 a_3 + \frac{3}{4} b_1^2 a_3 - \frac{3}{2} a_1 b_1 b_3 \right) + \dots - v b_1, \\ d_1 &= \mu_1 b_1 + \frac{3}{4} \mu_3 b_1 (a_1^2 + b_1^2) + \mu_3 \left(-\frac{3}{4} a_1^2 b_3 + \frac{3}{4} b_1^2 b_3 + \frac{3}{2} a_1 b_1 b_3 \right) + \dots + v a_1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} c_3 &= \mu_1 a_3 + \frac{1}{4} \mu_3 (-a_1^3 + 3a_1 b_1^2 + 6a_1^2 a_3 + 6b_1^2 a_3) + \dots - v b_3, \\ d_3 &= \mu_1 b_3 + \frac{1}{4} \mu_3 (b_1^3 - 3a_1^2 b_1 + 6a_1^2 b_3 + 6b_1^2 b_3) + \dots + v a_3. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

We nemen verder aan dat de afwijking van de lineariteit der zelfinductie gering is. Dan zal het percentage derde bovenharmonische in flux en stroom klein zijn, en mag men vijfde- en hogere bovenharmonischen verwaarloozen.

In (6) mogen we dan de termen met den factor $\mu_3 a_3$ of $\mu_3 b_3$ verwaarloozen, en (6) gaat over in:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \mu_1 a_1 + \frac{3}{4} \mu_3 a_1 (a_1^2 + b_1^2) - v b_1, \\ d_1 &= \mu_1 b_1 + \frac{3}{4} \mu_3 b_1 (a_1^2 + b_1^2) + v a_1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Uit (8) en (3) volgt nu, na invoering van de grootheden:
 $\varepsilon = \omega R C$ en:

$x = a_1^2 + b_1^2 = (\text{amplitude eerste harmonische van de flux})^2$:

$$\left. \begin{aligned} a_1 (\omega^2 C - \mu_1 + \varepsilon v) + b_1 (v + \varepsilon \mu_1) + \frac{3}{4} \mu_3 x (\varepsilon b_1 - a_1) &= 0, \\ b_1 (\omega^2 C - \mu_1 + \varepsilon v) + a_1 (v + \varepsilon \mu_1) + \frac{3}{4} \mu_3 x (\varepsilon a_1 + b_1) &= \omega C \hat{e}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

De som der quadraten van (9) geeft:

$$\left. \begin{aligned} x^3 \cdot \frac{9}{16} \mu_3^2 (1 + \varepsilon^2) + x^2 \cdot \frac{3}{2} \mu_3 \{ \mu_1 (1 + \varepsilon^2) - \omega^2 C \} + \\ + x \{ (\omega^2 C - \mu_1)^2 + v^2 + \varepsilon^2 (v^2 + \mu_1^2) + 2 v \varepsilon \omega^2 C \} &= \omega^2 C^2 \hat{e}^2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Hiermede zijn we gekomen tot de vergelijking, waaruit het gedrag van het circuit is af te leiden.

Circuit zonder weerstand.

Hier is $\varepsilon = 0$ en (10) wordt:

$$\frac{9}{10} \mu_3^2 x^3 - \frac{3}{2} \mu_3 x^2 (\omega^2 C - \mu_1) + x \{(\omega^2 C - \mu_1)^2 + v^2\} = \omega^2 C^2 \hat{e}^2. \quad (11)$$

Dit is een derde graads vergelijking in x , die 1 of 3 reële wortels kan hebben. Een analyse van (11) levert op, dat de krommen $x = f(\hat{e})$ voor waarden van C , die boven een zeker minimum liggen, een gedaante hebben als op fig. 6 is aangegeven. Uit fig. 6 volgt dat bij toenemende \hat{e} in het punt A , bij afnemende \hat{e} in het punt B , het kipverschijnsel te verwachten is.

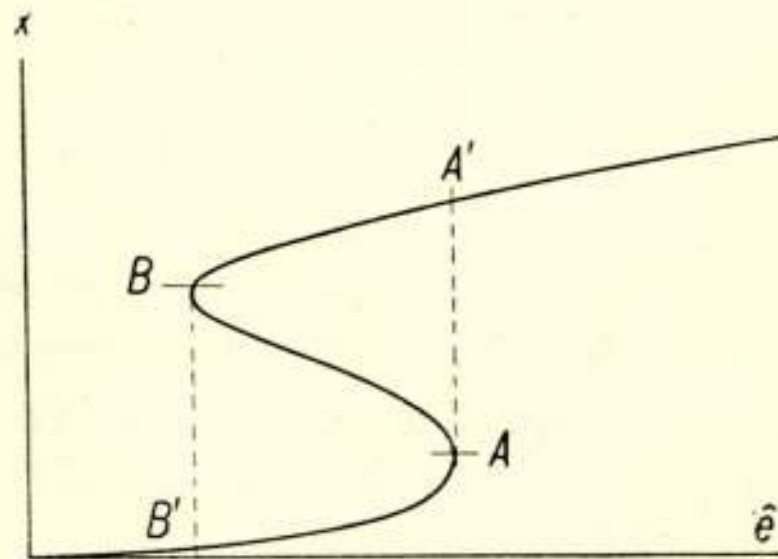


Fig. 6.

In de punten A en B is $\frac{\partial \hat{e}}{\partial x} = 0$, dus ook $\frac{\partial \hat{e}^2}{\partial x} = 0$.

Dit op (11) toegepast geeft:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\omega^2 C^2 \hat{e}^2) = \frac{27}{16} \mu_3^2 x^2 - 3 \mu_3 x (\omega^2 C - \mu_1) + (\omega^2 C - \mu_1)^2 + v^2 = 0.$$

De wortels hiervan zijn:

$$\mu_3 x = \frac{8(\omega^2 C - \mu_1) + m \cdot 4 \sqrt{(\omega^2 C - \mu_1)^2 - 3v^2}}{9} \quad \text{Met: } m^2 = +1. \quad (12)$$

Het kipverschijnsel zal alleen optreden als de wortels (12) reëel zijn. Dit is het geval als:

$$(\omega^2 C - \mu_1)^2 - 3v^2 \geq 0.$$

$$\text{Of: } \underline{\underline{\omega^2 C \geq \mu_1 + v \sqrt{3}}}$$

De grootte van de capaciteit moet dus boven een minimum liggen.

De grootte van de wisselspanning, waarbij het kipverschijnsel zal optreden, vindt men door de substitutie van (12) in (11).

Deze geeft:

$$\begin{aligned} \mu_3 \omega^2 C^2 \hat{e}^2 &= \frac{8}{81} (\omega^2 C - \mu_1) \cdot \{ (\omega^2 C - \mu_1)^2 + 9 v^2 \} - \\ &- m \cdot \frac{8}{81} \{ (\omega^2 C - \mu_1)^2 - 3 v^2 \}^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\mu_3 \omega^2 C^2 \hat{e}^2} \right\} (13)$$

$$m^2 = 1.$$

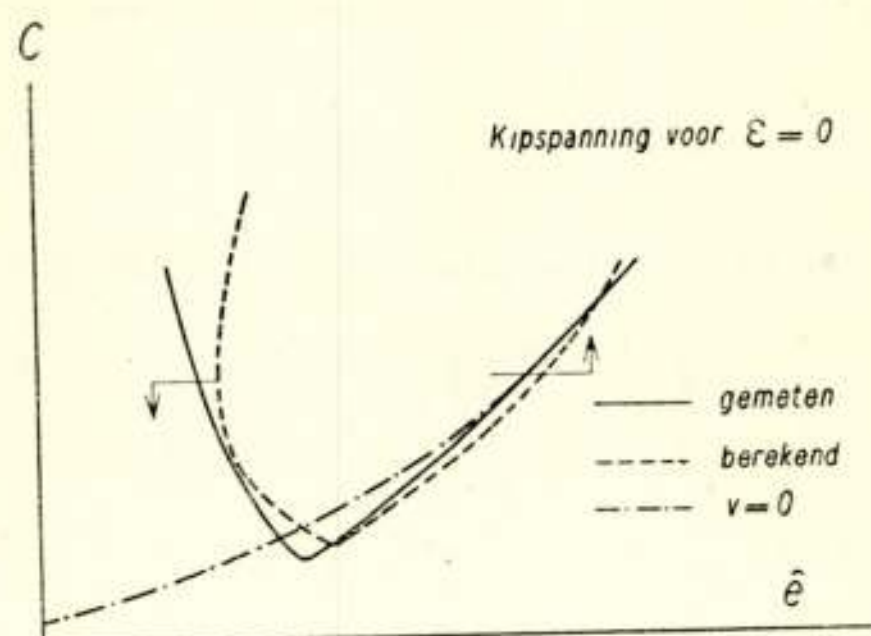


Fig. 7.

Formule (13) werd gecontroleerd door metingen, gedaan aan een circuit met $\varepsilon \approx 0$. Op figuur 7 zijn meting en berekening vergeleken.

—↑ = bovenste kipgrens $\approx A$ in fig. 6.

↑— = onderste kipgrens $\approx B$ in fig. 6.

Circuit met weerstand.

Op dezelfde wijze als voor $\varepsilon = 0$ is uit (10) voor het geval $\varepsilon \neq 0$ de kipspanning te bepalen.

Dit geval wordt hier niet uitgewerkt.

Circuit met maximale weerstand, waarbij kippen zal optreden.

In het geval met weerstand wordt het verband tusschen x en \hat{e} gegeven door (10), welke luidde:

$$\left. \begin{aligned} & x^3 \cdot \frac{9}{16} \mu_3^2 (1 + \varepsilon^2) + x^2 \cdot \frac{3}{2} \mu_3 \{ \mu_1 (1 + \varepsilon^2) - \omega^2 C \} + \\ & + x \{ (\omega^2 C - \mu_1)^2 + v^2 + \varepsilon^2 (v^2 + \mu_1^2) + 2 v \varepsilon \omega^2 C \} = \omega^2 C^2 \varepsilon^2. \end{aligned} \right\} (10)$$

Men vindt de kipspanning weer, door in (10) $\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial x} = 0$ te stellen. Dit levert op:

$$\begin{aligned} & x^2 \cdot \frac{27}{16} \mu_3^2 (1 + \varepsilon^2) + x \cdot 3 \mu_3 \{ \mu_1 (1 + \varepsilon^2) - \omega^2 C \} + \\ & + (\omega^2 C - \mu_1)^2 + v^2 + \varepsilon^2 (v^2 + \mu_1^2) + 2 v \varepsilon \omega^2 C = 0. \end{aligned}$$

De wortels van deze vergelijking zijn:

$$\mu_3 x = \frac{8 \{ \omega^2 C - \mu_1 (1 + \varepsilon^2) \} \pm}{(14)}$$

$$\pm 4 \sqrt{\{ \omega^2 C - \mu_1 (1 + \varepsilon^2) \}^2 - 3 (v + \varepsilon \omega^2 C)^2 - 3 \varepsilon^2 \{ v^2 + (1 + \varepsilon^2) (v^2 + \mu_1^2) + 2 v \varepsilon \omega^2 C \}} \\ 9 (1 + \varepsilon^2)^2}$$

Hieruit volgt, dat het kipverschijnsel optreedt, als:

$$\begin{aligned} & \{ \omega^2 C - \mu_1 (1 + \varepsilon^2) \}^2 - 3 (v + \varepsilon \omega^2 C)^2 - \\ & - 3 \varepsilon^2 \{ v^2 + (1 + \varepsilon^2) (v^2 + \mu_1^2) + 2 v \varepsilon \omega^2 C \} \geq 0. \end{aligned}$$

Dus ook: $\{ \omega^2 C - \mu_1 (1 + \varepsilon^2) \}^2 - 3 (v + \varepsilon \omega^2 C)^2 > 0$.

$$\left| \omega^2 C - \mu_1 (1 + \varepsilon^2) \right| > \left| (v + \varepsilon \omega^2 C) \sqrt{3} \right|$$

Uit het experiment volgt, dat ε beneden een zeker maximum moet liggen. Bovenstaande voorwaarde moet dus geschreven worden in den vorm:

$$\omega^2 C - \mu_1 (1 + \varepsilon^2) > (v + \varepsilon \omega^2 C) \sqrt{3}.$$

$$\text{Of: } \omega^2 C (1 - \varepsilon \sqrt{3}) > \mu_1 (1 + \varepsilon^2) + v \sqrt{3}.$$

$$\text{Volgt: } 1 - \varepsilon \sqrt{3} > 0 \quad \text{of: } \underline{\underline{\varepsilon < \frac{1}{3} \sqrt{3}}}.$$

Wordt nu ε^2 verwaarloosd t.o.v. 1, dan moet dus:

$$\omega^2 C (1 - \varepsilon \sqrt{3}) > \mu_1 + v \sqrt{3}.$$

De maximale waarde van ε , waarbij het kipverschijnsel nog optreedt, is dus bij benadering bepaald door:

$$\omega^2 C (1 - \varepsilon_{max} \sqrt{3}) \approx \mu_1 + v \sqrt{3}.$$

$$\text{Of: } \varepsilon_{max.} \approx \frac{1}{3} \sqrt{3} - \frac{\frac{1}{3} \mu_1 \sqrt{3} + v}{\omega^2 C}$$

$$\text{Volgt: } R_{max.} \approx \frac{\sqrt{3}}{3 \omega C} - \frac{\frac{1}{3} \mu_1 \sqrt{3} + v}{\omega^3 C^2}. \quad (15)$$

Zie figuur 8.

Voor deze grenswaarde is volgens (14)

$$\mu_3 x = \frac{8 \{ \omega^2 C - \mu_1 (1 + \varepsilon^2) \}}{9 (1 + \varepsilon^2)}.$$

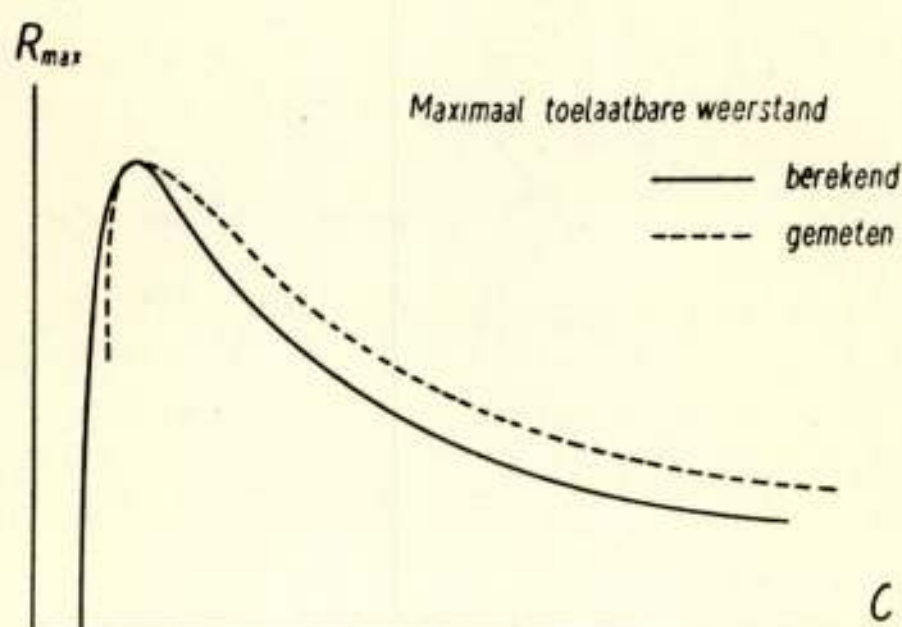


Fig. 8.

(10) levert voor de grootte van de kipspanning bij de maximale weerstand:

$$\hat{e} = \frac{4}{9} \sqrt{2} \cdot \frac{\{ \omega^2 C - \mu_1 (1 + \varepsilon^2) \}^{\frac{3}{2}}}{\omega C (1 + \varepsilon^2) \sqrt{\mu_3}}. \quad (16)$$

$$\text{Waarin: } \varepsilon \approx \frac{1}{3} \sqrt{3} - \frac{v + \frac{1}{3} \mu_1 \sqrt{3}}{\omega^2 C}.$$

In figuur 9 is het resultaat van (16) vergeleken met het gemeten verloop der kromme $\hat{e} = f(C)$.

Percentage derde bovenharmonische in de flux.

Verwaarloost men de invloed van weerstand en hysteresis, dan is het mogelijk het percentage derde bovenharmonische in de flux te berekenen.

(4) en (7) gaan dan over in:

$$\left. \begin{aligned} 9 \omega^2 a_3 - \frac{1}{C} c_3 &= 0. \\ 9 \omega^2 b_3 - \frac{1}{C} d_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} c_3 &= \mu_1 a_3 + \frac{1}{4} \mu_3 a_1 (-a_1^2 + 3b_1^2) + \frac{3}{2} \mu_3 a_3 (a_1^2 + b_1^2). \\ d_3 &= \mu_1 b_3 + \frac{1}{4} \mu_3 b_1 (-3a_1^2 + b_1^2) + \frac{3}{2} \mu_3 b_3 (a_1^2 + b_1^2). \end{aligned} \right\}$$

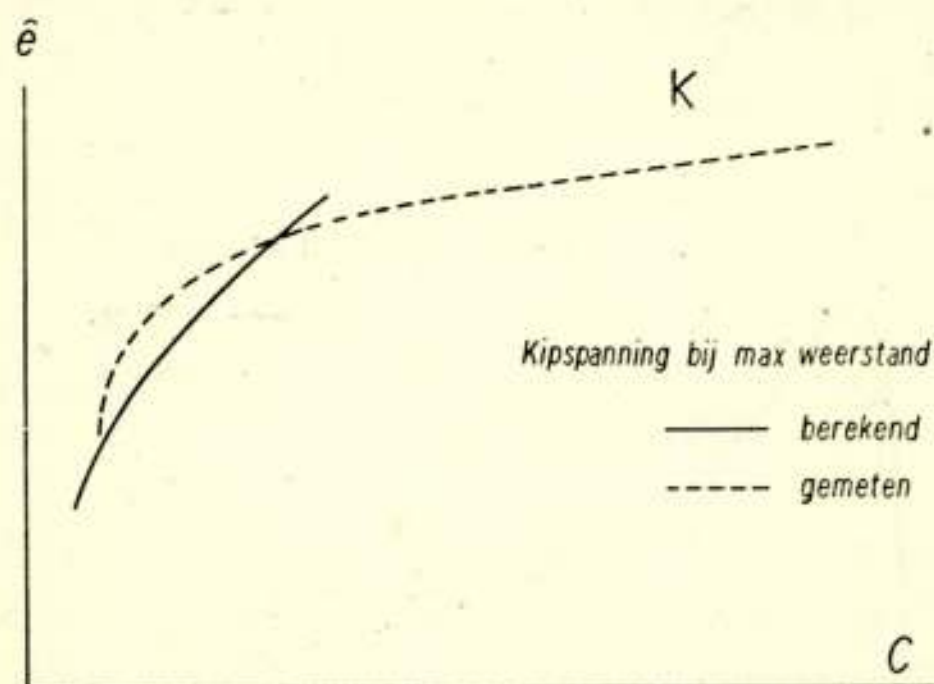


Fig. 9.

Uit deze vergelijkingen volgt na eliminatie van c_3 en d_3 :

$$\left. \begin{aligned} a_3 \{9 \omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 (a_1^2 + b_1^2)\} &= \frac{1}{4} \mu_3 a_1 (-a_1^2 + 3b_1^2). \\ b_3 \{9 \omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 (a_1^2 + b_1^2)\} &= \frac{1}{4} \mu_3 b_1 (-3a_1^2 + b_1^2). \end{aligned} \right\}$$

De som der quadraten levert op:

$$(a_3^2 + b_3^2) \{9 \omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 (a_1^2 + b_1^2)\}^2 = \frac{1}{16} \mu_3^2 (a_1^2 + b_1^2)^3. \quad (17)$$

Nu is $a_1^2 + b_1^2 = \hat{\psi}_1^2 = (\text{amplitude 1e harmonische van de flux})^2$.

$a_3^2 + b_3^2 = \hat{\psi}_3^2 = (\text{ " " 3e bovenharm. " " " })^2$.

Hiermee is (17) te schrijven in de vorm:

$$\hat{\psi}_3 \{9 \omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 \hat{\psi}_1^2\} = \frac{1}{4} \mu_3 \hat{\psi}_1^3.$$

Of:
$$\frac{\hat{\psi}_3}{\hat{\psi}_1} = \frac{1}{4} \frac{\mu_3 \hat{\psi}_1^2}{9 \omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 \hat{\psi}_1^2}.$$

Uit (12) volgt, dat bij verwaarloozing van hysteresis en Ohmsche weerstand voor de bovenste kipgrens geldt:

$$\mu_3 x = \mu_3 \hat{\psi}_1^2 = \frac{4}{9} (\omega^2 C - \mu_1).$$

Deze waarde van $\mu_3 \hat{\psi}_1^2$, gesubstitueerd in (18) geeft:

$$\frac{\hat{\psi}_3}{\hat{\psi}_1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{\omega^2 C - \mu_1}{9 \omega^2 C - \mu_1 - \frac{2}{3} (\omega^2 C - \mu_1)} = \frac{\omega^2 C - \mu_1}{75 \omega^2 C - 3 \mu_1} < \frac{1}{75}. \quad (19)$$

Uit (18) is verder af te leiden dat $\frac{d}{d(\hat{\psi}_1^2)} \left(\frac{\hat{\psi}_3}{\hat{\psi}_1} \right)$ steeds positief is. Op de onderste tak ($OB'A$) van de kromme op figuur 6 is dus steeds $\hat{\psi}_3 < \frac{1}{75} \hat{\psi}_1$ en mag $\hat{\psi}_3$ dus zonder bezwaar verwaarloosd worden.

Voor de onderste kipgrens volgt uit (12):

$$\mu_3 x = \mu_3 \hat{\psi}_1^2 = \frac{4}{9} (\omega^2 C - \mu_1).$$

Hier is:

$$\frac{\hat{\psi}_3}{\hat{\psi}_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\omega^2 C - \mu_1}{7 \omega^2 C + \mu_1} < \frac{1}{21}. \quad (20)$$

De uitkomst van (19) klopt goed met het oscillogram, hetwelk een flux te zien geeft, die niet zichtbaar van de sinusvorm verschilt. Bij de bovenste kipgrens is de fluxamplitude niet groot en treedt dus geen sterke verzadiging op. De niet-lineariteit van de $\psi - i$ kromme wordt in dit geval goed uitgedrukt door een derde graads term.

Bij de onderste kipgrens zijn fluxamplitude en verzadiging veel groter. De niet-lineariteit van de $\psi - i$ kromme wordt hier onvoldoende benaderd door een derde graads term. Het percentage derde bovenharmonische is dan ook veel groter dan (20) aangeeft.

§ 3. Derde onderharmonische.

Laat men op het circuit van fig. 5 een sinusvormige wisselspanning werken, dan is een periodieke trillingstoestand mogelijk, waarbij een derde subharmonische optreedt.

In het volgende wordt getracht de voorwaarden te bepalen, waaraan de circuitconstanten moeten voldoen om deze trillingstoestand mogelijk te maken. Hierbij wordt uitgegaan van de veronderstelling, dat flux en stroom geen andere harmonische componenten bevatten dan grondtrilling en subharmonische. Aan deze veronderstelling wordt, althans wat betreft de flux, tamelijk goed voldaan.

We schrijven dus:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= a_1 \sin \frac{1}{3} \omega t + a_3 \sin \omega t + b_1 \cos \frac{1}{3} \omega t + b_3 \cos \omega t. \\ i &= c_1 \sin \frac{1}{3} \omega t + c_3 \sin \omega t + d_1 \cos \frac{1}{3} \omega t + d_3 \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Voor het circuit geldt de differentiaal vergelijking:

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \omega \hat{e} \cos \omega t. \quad (2)$$

Door (1) in (2) te substitueren, vindt men de vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{9} \omega^2 a_1 - \frac{1}{3} \omega R d_1 + \frac{1}{C} c_1 &= 0. \\ -\frac{1}{9} \omega^2 b_1 + \frac{1}{3} \omega R c_1 + \frac{1}{C} d_1 &= 0. \\ -\omega^2 a_3 - \omega R d_3 + \frac{1}{C} c_3 &= 0. \\ -\omega^2 b_3 + \omega R c_3 + \frac{1}{C} d_3 &= \omega \hat{e}. \end{aligned} \right\}$$

Na invoering van de grootheid $\varepsilon = \omega R C$ zijn deze vergelijkingen te schrijven als:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{9} \omega^2 C a_1 + \frac{1}{3} \varepsilon d_1 - c_1 &= 0. \\ -\frac{1}{9} \omega^2 C b_1 + \frac{1}{3} \varepsilon c_1 + d_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 C a_3 + \varepsilon d_3 - c_3 &= 0. \\ -\omega^2 C b_3 + \varepsilon c_3 + d_3 &= \omega C \hat{e}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Als benadering voor de $\psi - i$ lus wordt weer genomen de formule:

$$i = \mu_1 \psi + \mu_3 \psi^3 + v \sum_{n=\frac{1}{3}}^1 \frac{\partial \psi}{\partial (n \omega t)}. \quad (5)$$

Uit (1) en (5) volgt:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \mu_1 a_1 + \frac{3}{4} \mu_3 a_1 x - \frac{3}{4} \mu_3 a_3 (a_1^2 - b_1^2) + \frac{3}{2} \mu_3 a_1 z - \frac{3}{2} \mu_3 a_1 b_1 b_3 - v b_1. \\ d_1 &= \mu_1 b_1 + \frac{3}{4} \mu_3 b_1 x - \frac{3}{4} \mu_3 b_3 (a_1^2 - b_1^2) + \frac{3}{2} \mu_3 b_1 z + \frac{3}{2} \mu_3 a_1 b_1 a_3 + v a_1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} c_3 &= \mu_1 a_3 + \frac{1}{4} \mu_3 a_1 (-a_1^2 + 3b_1^2) + \frac{3}{2} \mu_3 a_3 x + \frac{3}{4} \mu_3 a_3 z - v b_3. \\ d_3 &= \mu_1 b_3 + \frac{1}{4} \mu_3 b_1 (-3a_1^2 + b_1^2) + \frac{3}{2} \mu_3 b_3 x + \frac{3}{4} \mu_3 b_3 z + v a_3. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ter vereenvoudiging is hier geschreven:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= \hat{\psi}_1^2 = x = (\text{amplitude derde subharmonische i/d flux})^2 \\ a_3^2 + b_3^2 &= \hat{\psi}_3^2 = z = (\text{ " eerste harmonische " " })^2 \end{aligned}$$

(6) in (3) gesubstitueerd geeft:

$$\left. \begin{aligned} & a_1 \left(\frac{1}{9} \omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{4} \mu_3 x - \frac{3}{2} \mu_3 z + \frac{1}{3} \varepsilon v \right) + \\ & + b_1 \left\{ v + \frac{1}{3} \varepsilon \left(\mu_1 + \frac{3}{4} \mu_3 x + \frac{3}{2} \mu_3 z \right) \right\} = \frac{3}{4} \mu_3 (a_1^2 - b_1^2) \left(\frac{1}{3} \varepsilon b_3 - a_3 \right) - \\ & - \frac{3}{2} \mu_3 a_1 b_1 \left(\frac{1}{3} \varepsilon a_3 + b_3 \right). \\ & - b_1 \left(\frac{1}{9} \omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{4} \mu_3 x - \frac{3}{2} \mu_3 z + \frac{1}{3} \varepsilon v \right) + \\ & + a_1 \left\{ v + \frac{1}{3} \varepsilon \left(\mu_1 + \frac{3}{4} \mu_3 x + \frac{3}{2} \mu_3 z \right) \right\} = \frac{3}{4} \mu_3 (a_1^2 - b_1^2) \left(\frac{1}{3} \varepsilon a_3 + b_3 \right) + \\ & + \frac{3}{2} \mu_3 a_1 b_1 \left(\frac{1}{3} \varepsilon b_3 - a_3 \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Uit (7) en (4) volgt:

$$\left. \begin{aligned} & a_3 (\omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 x - \frac{3}{4} \mu_3 z + \varepsilon v) + b_3 \left\{ v + \varepsilon \left(\mu_1 + \frac{3}{2} \mu_3 x + \frac{3}{4} \mu_3 z \right) \right\} = \\ & = -\frac{1}{4} \mu_3 b_1 \varepsilon (-3a_1^2 + b_1^2) + \frac{1}{4} \mu_3 a_1 (-a_1^2 + 3b_1^2). \\ & - b_3 (\omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 x - \frac{3}{4} \mu_3 z + \varepsilon v) + a_3 \left\{ v + \varepsilon \left(\mu_1 + \frac{3}{2} \mu_3 x + \frac{3}{4} \mu_3 z \right) \right\} = \\ & = -\frac{1}{4} \mu_3 a_1 \varepsilon (-a_1^2 + 3b_1^2) - \frac{1}{4} \mu_3 b_1 (-3a_1^2 + b_1^2) + \omega C \hat{e}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

De som der quadraten van (8) geeft:

$$\left. \begin{aligned} & x \cdot \left[\left(\frac{1}{9} \omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{4} \mu_3 x - \frac{3}{2} \mu_3 z + \frac{1}{3} \varepsilon v \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left\{ v + \frac{1}{3} \varepsilon \left(\mu_1 + \frac{3}{4} \mu_3 x + \frac{3}{2} \mu_3 z \right) \right\}^2 \right] = \frac{9}{16} \mu_3^2 (1 + \frac{1}{9} \varepsilon^2) x^2 z. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

De som der quadraten van (9) geeft:

$$\left. \begin{aligned} & z \cdot \left[(\omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 x - \frac{3}{4} \mu_3 z + \varepsilon v)^2 + \left\{ v + \varepsilon \left(\mu_1 + \frac{3}{2} \mu_3 x + \frac{3}{4} \mu_3 z \right) \right\}^2 \right] = \\ & = \omega^2 C^2 \hat{e}^2 + \frac{1}{16} \mu_3^2 x^3 (1 + \varepsilon^2) - \frac{1}{2} \mu_3 \omega C \hat{e} \left\{ \varepsilon a_1 (-a_1^2 + 3b_1^2) + \right. \\ & \left. + b_1 (-3a_1^2 + b_1^2) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Uit (10) volgt, dat er twee mogelijkheden zijn, de toestand waarin $x = 0$, dus zonder subharmonischen, en de toestand met $x \neq 0$. We beschouwen hier het geval dat $x \neq 0$ is, en nemen

verder aan dat $\varepsilon = 0$ is. (11) is dan te vereenvoudigen tot:

$$\left. \begin{aligned} z \{ (\omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 x - \frac{3}{4} \mu_3 z)^2 + v^2 \} = \\ = \omega^2 C^2 \hat{e}^2 + \frac{1}{16} \mu_3^2 x^3 - \frac{1}{2} \mu_3 \omega C \hat{e} b_1 (-3 a_1^2 + b_1^2) . \end{aligned} \right\} \quad (11a)$$

In deze formule is het product $b_1 (-3 a_1^2 + b_1^2)$ nog onbekend. Het is als volgt te berekenen:

Is $\varepsilon = 0$, dan volgt uit (8), door de eerste vergelijking met b_1 , de tweede vergelijking met a_1 te vermenigvuldigen, en daarna op te tellen:

$$\begin{aligned} v (b_1^2 + a_1^2) + \frac{3}{4} \mu_3 a_1 b_1 (a_1^2 - b_1^2) + \frac{3}{2} \mu_3 a_1 b_1^2 b_3 - \\ - \frac{3}{4} \mu_3 a_1 b_3 (a_1^2 - b_1^2) + \frac{3}{2} \mu_3 a_1^2 b_1 a_3 = 0 . \end{aligned}$$

$$\text{Of: } v x = -\frac{3}{4} \mu_3 b_1 a_3 (3 a_1^2 - b_1^2) + \frac{3}{4} \mu_3 a_1 b_3 (a_1^2 - 3 b_1^2) .$$

Na invoering van $X = b_1 (-3 a_1^2 + b_1^2)$ en $Y = a_1 (-a_1^2 + 3 b_1^2)$ wordt dit:

$$v x = \frac{3}{4} \mu_3 (a_3 X - b_3 Y) . \quad (12)$$

Uit (9) volgt voor $\varepsilon = 0$ op dezelfde wijze:

$$v z = \frac{1}{4} \mu_3 (-a_3 X + b_3 Y) + \omega C \hat{e} a_3 . \quad (13)$$

Uit (12) en (13) volgt:

$$a_3 = \frac{v (x + 3 z)}{3 \omega C \hat{e}} . \quad (14)$$

Na eliminatie van a_3 uit de tweede vergelijking (9) gaat deze over in:

$$\begin{aligned} -b_3 (\omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 x - \frac{3}{4} \mu_3 z) + \frac{v^2 (x + 3 z)}{3 \omega C \hat{e}} + \\ + \frac{1}{4} \mu_3 b_1 (-3 a_1^2 + b_1^2) = \omega C \hat{e} . \end{aligned}$$

Na substitutie in (11a) van de uit bovenstaande vergelijking gevonden waarde der term $\mu_3 b_1 (-3 a_1^2 + b_1^2)$, gaat deze over in:

$$\begin{aligned} z \{ (\omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 x - \frac{3}{4} \mu_3 z)^2 + v^2 \} = -\omega^2 C^2 \hat{e}^2 - \\ - 2 \omega C \hat{e} b_3 (\omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 x - \frac{3}{4} \mu_3 z) + \frac{2}{3} v^2 (x + 3 z) + \frac{1}{16} \mu_3^2 x^3 . \end{aligned}$$

$$\text{Of: } \left\{ b_3 (\omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 x - \frac{3}{4} \mu_3 z) + \omega C \hat{e} \right\}^2 = \frac{1}{16} \mu_3^2 x^3 + \left. + \frac{1}{3} v^2 (2x + 3z) - \frac{v^2 (x + 3z)^2}{9 \omega^2 C^2 \hat{e}^2} \cdot (\omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 x - \frac{3}{4} \mu_3 z)^2 \right\} \quad (15)$$

Ter vereenvoudiging wordt verder geschreven:

$$\omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 x - \frac{3}{4} \mu_3 z = N.$$

(15) is te schrijven in den vorm:

$$b_3 = -\frac{\omega C \hat{e}}{N} + \frac{m}{N} \sqrt{\frac{1}{16} \mu_3^2 x^3 + \frac{1}{3} v^2 (2x + 3z) - \frac{v^2 (x + 3z)^2}{9 \omega^2 C^2 \hat{e}^2}} N^2 \quad \text{waarin: } m^2 = 1.$$

$$\text{Verder was: } a_3 = \frac{v (x + 3z)}{3 \omega C \hat{e}}.$$

Uit de som der quadraten van deze vergelijkingen volgt:

$$\begin{aligned} 2 m \omega C \hat{e} \sqrt{\frac{1}{16} \mu_3^2 x^3 + \frac{1}{3} v^2 (2x + 3z) - \frac{v^2 (x + 3z)^2}{9 \omega^2 C^2 \hat{e}^2}} \cdot N^2 = \\ = \omega^2 C^2 \hat{e}^2 + \frac{1}{16} \mu_3^2 x^3 + \frac{1}{3} v^2 (2x + 3z) - z N^2. \end{aligned}$$

Quadratering van deze vergelijking leidt tot de vergelijking:

$$\left\{ \omega^2 C^2 \hat{e}^2 - z N^2 - \frac{1}{16} \mu_3^2 x^3 - \frac{1}{3} v^2 (2x + 3z) \right\}^2 = \frac{4}{9} N^2 x^2 \left(\frac{9}{16} \mu_3^2 x z - v^2 \right).$$

Nu is volgens (10) voor $\varepsilon = 0$:

$$x \left(\frac{9}{16} \mu_3^2 x z - v^2 \right) = \left(\frac{1}{9} \omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{4} \mu_3 x - \frac{3}{2} \mu_3 z \right)^2 \cdot x.$$

$$\text{Volgt: } \omega^2 C^2 \hat{e}^2 - z N^2 - \frac{1}{16} \mu_3^2 x^3 - \frac{1}{3} v^2 (2x + 3z) =$$

$$= \frac{2}{3} n N x \left(\frac{1}{9} \omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{4} \mu_3 x - \frac{3}{2} \mu_3 z \right). \quad \text{waarin: } n^2 = 1.$$

x en z zijn nu dus bepaald door de laatste vergelijking en vergelijking (10). Schrijven we beide vergelijkingen nog eens uit, in aanmerking nemende dat $\varepsilon = 0$ is gesteld, dan is dus:

$$x \left\{ \left(\frac{1}{9} \omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{4} \mu_3 x - \frac{3}{2} \mu_3 z \right)^2 + v^2 \right\} = \frac{9}{16} \mu_3^2 x^2 z. \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 C^2 \hat{e}^2 - z (\omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 x - \frac{3}{4} \mu_3 z)^2 - \frac{1}{3} v^2 (2x + 3z) = \\ = \frac{1}{16} \mu_3^2 x^3 + \frac{2}{3} n x (\omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 x - \frac{3}{4} \mu_3 z) \left(\frac{1}{9} \omega^2 C - \mu_1 - \right. \\ \left. - \frac{3}{4} \mu_3 x - \frac{3}{2} \mu_3 z \right). \quad n^2 = 1. \end{aligned} \quad (17)$$

(16) is te splitsen in twee vergelijkingen, n.l. in $x = 0$ en de

vergelijking van een ellips, waarvan de aslengtes evenredig zijn met $\{(\frac{1}{9}\omega^2 C - \mu_1)^2 - 7v^2\}$. Deze ellips heeft blijkbaar alleen dan reële punten als:

$$(\frac{1}{9}\omega^2 C - \mu_1)^2 - 7v^2 \geq 0.$$

$$\text{Of: } \underline{\underline{\omega^2 C \geq 9(\mu_1 + v\sqrt{7})}}.$$

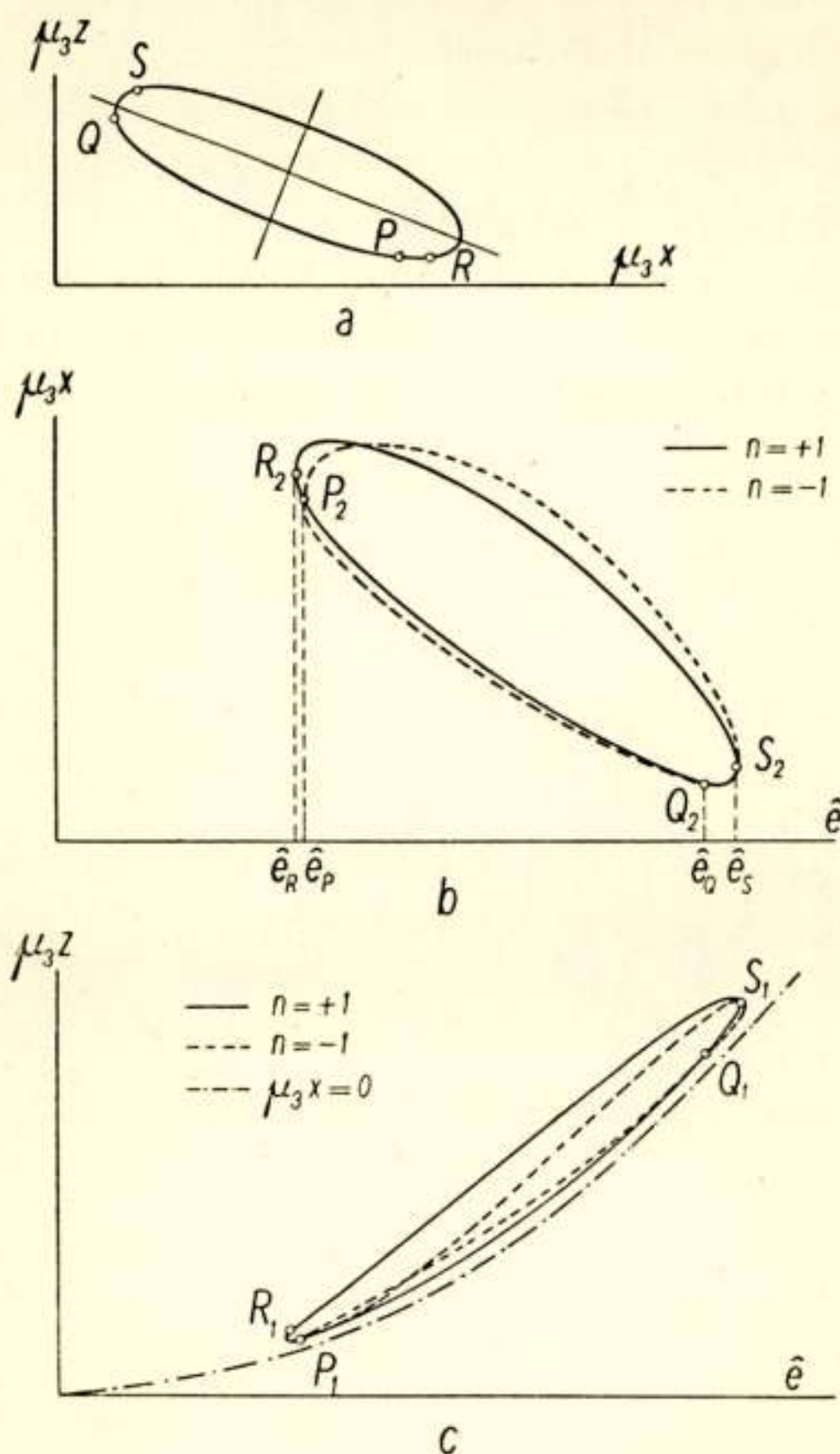


Fig. 10.

Amplitude der fluxcomponenten als functie van \hat{e} ,
bij aanwezigheid der derde subharmonische.

Is $\omega^2 C < 9(\mu_1 + v\sqrt{7})$, dan volgt uit (16) dat $\mu_3 x = 0$ moet zijn. Dan zal de derde subharmonische dus niet optreden.

Het levert groote moeilijkheden op om uit (16) en (17) de onbekenden $\mu_3 x$ en $\mu_3 z$ op te lossen. Teneinde nu toch een inzicht te krijgen in het verloop der krommen $\mu_3 x = f(\hat{e})$ en

$\mu_3 z = f(\hat{e})$ is dit uit (16) en (17) voor een bepaald geval grafisch onderzocht. Dit leverde de krommen van fig. 10b en fig. 10c. Fig. 10a geeft voor dit geval het verband tusschen $\mu_3 x$ en $\mu_3 z$ volgens (16).

Uit de figuren volgt al direct dat niet bij alle waarden van \hat{e} de derde subharmonische op kan treden. Voor $\hat{e} < \hat{e}_R$ en $\hat{e} > \hat{e}_S$ (fig. 10b) treedt geen subharmonische op.

De aanname, dat alleen op de gebieden RP en QS een derde subharmonische voorkomt, levert een resultaat op, dat goed met de metingen overeenstemt.

Een verklaring hiervoor zou men hierin kunnen zoeken, dat alleen de oplossing met $n = +1$ stabiel is, terwijl voor $\hat{e}_P < \hat{e} < \hat{e}_Q$ het inschakelmoment niet zoo gekozen kan worden, dat de derde subharmonische optreedt.

Voor de snijpunten P en Q van de krommen voor $n = +1$ en $n = -1$ geldt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{4} \mu_3 x - \frac{3}{2} \mu_3 z &= 0. && \text{Zie (17)} \\ v^2 &= \frac{9}{16} \mu_3^2 x z. && \text{Volgt uit (16)} \end{aligned}$$

Uit (17) volgt voor de snijpunten van de krommen voor $n = +1$ en $n = -1$ nog de mogelijkheid;

$$\omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 x - \frac{3}{4} \mu_3 z = 0.$$

Deze factor bleek echter steeds > 0 te zijn.

In P en Q is dus:

$$\text{Of: } \left. \begin{aligned} \mu_3 x &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{9} \omega^2 C - \mu_1 \right) + t \cdot \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{1}{9} \omega^2 C - \mu_1 \right)^2 - 8 v^2} \\ \mu_3 z &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9} \omega^2 C - \mu_1 \right) - t \cdot \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{1}{9} \omega^2 C - \mu_1 \right)^2 - 8 v^2} \end{aligned} \right\} t^2 = 1. \quad (18)$$

Met $t = +1$ correspondeert het punt P , met $t = -1$ het punt Q . De snijpunten P en Q treden alleen op als:

$$\underline{\underline{\omega^2 C \geq 9 (\mu_1 + v \sqrt{8})}}.$$

Uit (17) en (18) vindt men \hat{e}_P en \hat{e}_Q . Het gebied, waarin de derde subharmonische kan optreden, is verder nog begrensd door de punten R en S , waarin $d\hat{e}/dz = d\hat{e}/dx = 0$ en $n = +1$ is.

Worden voor verschillende capaciteiten grafisch de spanningen in de punten R en S bepaald, dan komt men tot het gear-

ceerde gebied van fig. 11 als het gebied, waarin de derde subharmonische kan optreden.

Is geen subharmonische aanwezig, dan geeft de gestreepstippelde kromme in fig. 10c het verloop van $\mu_3 \varepsilon$ als functie van \hat{e} aan.

Deze kromme snijdt beide andere krommen van fig. 10c in geen enkel punt. Het is dus niet mogelijk om door geleidelijke verandering der wisselspanning van deze kromme op één der beide andere over te gaan, m.a.w. door geleidelijke verandering

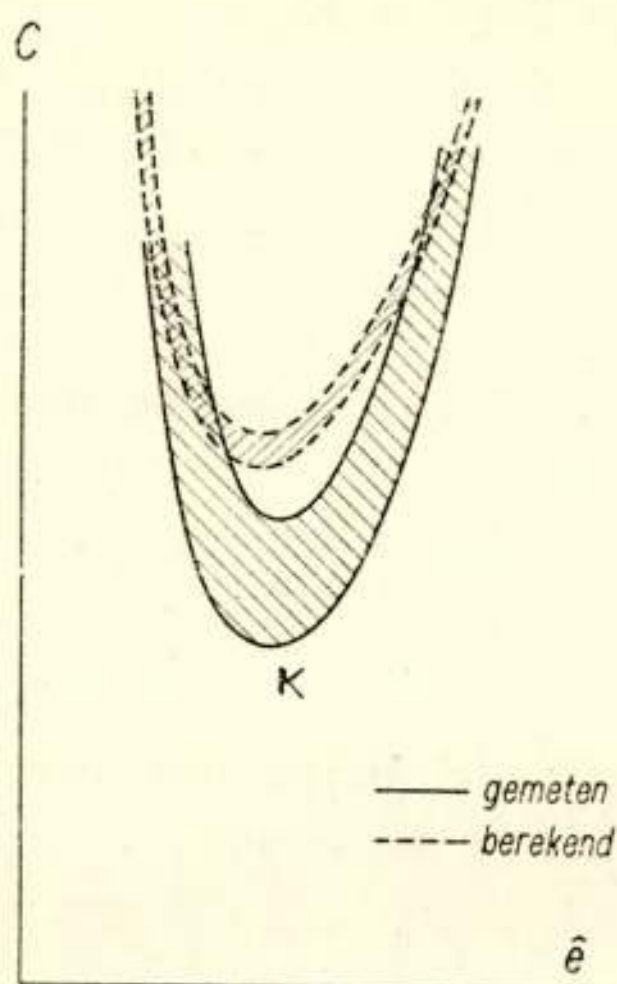


Fig. 11.

Gebied, waarbinnen de derde subharmonische kan optreden.

der wisselspanning kan men niet van een trillingstoestand zonder subharmonische kromme komen tot een trillingstoestand met subharmonischen.

§ 4. *Tweede onderharmonische*

Uit het experiment volgt dat de tweede subharmonische alleen optreedt, als de doorlopen hysteresislus asymmetrisch is, hetgeen bereikt kan worden door de ijzerkern van de spoel met een kleine gelijkstroom te magnetiseeren. Het inschakelmoment heeft geen invloed op het al of niet optreden der tweede subharmonische en ze zal spontaan ontstaan, zoodra de voorwaarden gunstig zijn.

Ook hier wordt uitgegaan van het meest eenvoudige geval, nl. dat flux en stroom geen andere harmonische componenten bevatten dan gelijkstroom, tweede subharmonische en grondtrilling.

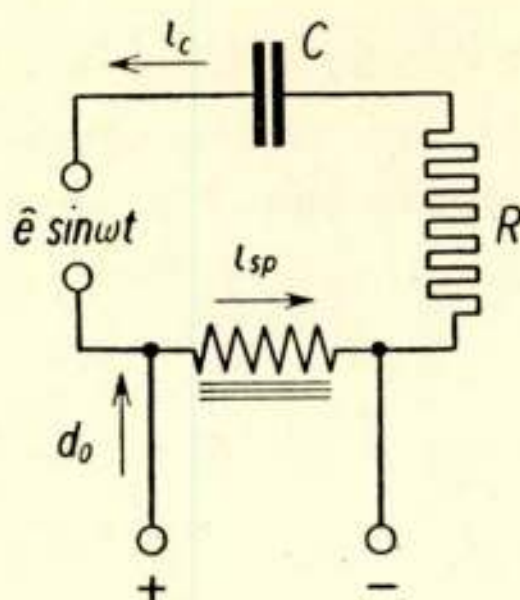


Fig. 12.

Flux en stroom worden dus geschreven in den vorm:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= a_1 \sin \frac{1}{2} \omega t + a_2 \sin \omega t + b_0 + b_1 \cos \frac{1}{2} \omega t + b_2 \cos \omega t. \\ i_{spoel} &= c_1 \sin \frac{1}{2} \omega t + c_2 \sin \omega t + d_0 + d_1 \cos \frac{1}{2} \omega t + d_2 \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Voor het circuit geldt de differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + R \frac{di_c}{dt} + \frac{i_c}{C} = \omega \hat{e} \cos \omega t. \quad (\text{Zie fig. 12}). \quad (2)$$

Hierin is i_c de stroom, die vloeit door capaciteit en weerstand.

$$\text{Nu is: } i_c = i_{spoel} - d_0.$$

$$\text{Volgt: } i_c = c_1 \sin \frac{1}{2} \omega t + c_2 \sin \omega t + d_1 \cos \frac{1}{2} \omega t + d_2 \cos \omega t. \quad (3)$$

Uit (1), (2) en volgt na invoering van $\varepsilon = \omega R C$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4} \omega^2 C a_1 + \frac{1}{2} \varepsilon d_1 - c_1 &= 0. \\ -\frac{1}{4} \omega^2 C b_1 + \frac{1}{2} \varepsilon c_1 + d_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 C a_2 + \varepsilon d_2 - c_2 &= 0 \\ -\omega^2 C b_2 + \varepsilon c_2 + d_2 &= \omega C \hat{e}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

De $\psi - i$ -lus wordt weer benaderd door de formule:

$$i_{spoel} = \mu_1 \psi + \mu_3 \psi^3 + v \sum_{n=\frac{1}{2}}^1 \frac{\partial \psi}{\partial (n \omega t)} . \quad (6)$$

Uit (1) en (6) volgt:

$$d_o = b_o (\mu_1 + \mu_3 b_o^2 + \frac{3}{2} \mu_3 \dot{ij} + \frac{3}{2} \mu_3 z) + \frac{3}{4} \mu_3 b_2 (b_1^2 - a_1^2) + \frac{3}{2} \mu_3 a_1 b_1 a_2 . \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= a_1 (\mu_1 + 3 \mu_3 b_o^2 + \frac{3}{4} \mu_3 \dot{ij} + \frac{3}{2} \mu_3 z) - 3 \mu_3 b_o (a_1 b_2 - a_2 b_1) - v b_1 . \\ d_1 &= b_1 (\mu_1 + 3 \mu_3 b_o^2 + \frac{3}{4} \mu_3 \dot{ij} + \frac{3}{2} \mu_3 z) + 3 \mu_3 b_o (a_1 a_2 + b_1 b_2) + v a_1 . \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} c_2 &= a_2 (\mu_1 + 3 \mu_3 b_o^2 + \frac{3}{2} \mu_3 \dot{ij} + \frac{3}{4} \mu_3 z) + 3 \mu_3 b_o a_1 b_1 - v b_2 . \\ d_2 &= b_2 (\mu_1 + 3 \mu_3 b_o^2 + \frac{3}{2} \mu_3 \dot{ij} + \frac{3}{4} \mu_3 z) + 3 \mu_3 b_o (b_1^2 - a_1^2) + v a_2 . \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Hierin is:

$$\dot{ij} = a_1^2 + b_1^2 = (\text{amplitude tweede subharmonische v.d. flux})^2 .$$

$$z = a_2^2 + b_2^2 = \quad \quad \quad \text{„ eerste harmonische} \quad \quad \quad \text{„ „})^2 .$$

(8) in (4) gesubstitueerd geeft:

$$\left. \begin{aligned} &a_1 \left\{ \frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_o^2 - \frac{3}{4} \mu_3 \dot{ij} - \frac{3}{2} \mu_3 z + \frac{1}{2} \varepsilon v \right\} + \\ &\quad + b_1 \left\{ v + \frac{1}{2} \varepsilon (\mu_1 + 3 \mu_3 b_o^2 + \frac{3}{4} \mu_3 \dot{ij} + \frac{3}{2} \mu_3 z) \right\} = \\ &= - 3 \mu_3 b_o (a_1 b_2 - a_2 b_1) - \frac{3}{2} \varepsilon \mu_3 b_o (a_1 a_2 + b_1 b_2) . \\ &- b_1 \left\{ \frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_o^2 - \frac{3}{4} \mu_3 \dot{ij} - \frac{3}{2} \mu_3 z + \frac{1}{2} \varepsilon v \right\} + \\ &\quad + a_1 \left\{ v + \frac{1}{2} \varepsilon (\mu_1 + 3 \mu_3 b_o^2 + \frac{3}{4} \mu_3 \dot{ij} + \frac{1}{2} \mu_3 z) \right\} = \\ &= - 3 \mu_3 b_o (a_1 a_2 + b_1 b_2) + \frac{3}{2} \varepsilon \mu_3 b_o (-a_2 b_1 + a_1 b_2) . \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Uit (9) en (5) volgt:

$$\left. \begin{aligned} &a_2 \left\{ \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_o^2 - \frac{3}{2} \mu_3 \dot{ij} - \frac{3}{4} \mu_3 z + \varepsilon v \right\} + \\ &\quad + b_2 \left\{ v + \varepsilon (\mu_1 + 3 \mu_3 b_o^2 + \frac{3}{2} \mu_3 \dot{ij} + \frac{3}{4} \mu_3 z) \right\} = \\ &= 3 \mu_3 b_o a_1 b_1 - \frac{3}{2} \varepsilon \mu_3 b_o (b_1^2 - a_1^2) . \\ &- b_2 \left\{ \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_o^2 - \frac{3}{2} \mu_3 \dot{ij} - \frac{3}{4} \mu_3 z + \varepsilon v \right\} + \\ &\quad + a_2 \left\{ v + \varepsilon (\mu_1 + 3 \mu_3 b_o^2 + \frac{3}{2} \mu_3 \dot{ij} + \frac{3}{4} \mu_3 z) \right\} = \\ &= - \frac{3}{2} \mu_3 b_o (b_1^2 - a_1^2) - 3 \mu_3 b_o a_1 b_1 + \omega C \hat{e} . \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

De som der quadraten van (10) levert op:

$$ij \left[\left\{ \frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_o^2 - \frac{3}{4} \mu_3 ij - \frac{3}{2} \mu_3 z + \frac{1}{2} \varepsilon v \right\}^2 + \right. \\ \left. + \left\{ v + \frac{1}{2} \varepsilon (\mu_1 + 3 \mu_3 b_o^2 + \frac{3}{4} \mu_3 ij + \frac{3}{2} \mu_3 z) \right\}^2 \right] = 9 \mu_3^2 b_o^2 (1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2) ij z. \quad (12)$$

De som der quadraten van (11) geeft:

$$z \left[\left\{ \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_o^2 - \frac{3}{2} \mu_3 ij - \frac{3}{4} \mu_3 z + \varepsilon v \right\}^2 + \right. \\ \left. + \left\{ v + \varepsilon (\mu_1 + 3 \mu_3 b_o^2 + \frac{3}{2} \mu_3 ij + \frac{3}{4} \mu_3 z) \right\}^2 \right] = \\ = \omega^2 C^2 \hat{e}^2 - 3 \omega C \hat{e} \mu_3 b_o (b_1^2 - a_1^2 + 2 \varepsilon a_1 b_1) + \frac{3}{4} \mu_3^2 b_o^2 (1 + \varepsilon^2) ij^2. \quad (13)$$

We beperken ons verder tot het geval dat $\varepsilon = 0$, een geval dat in de practijk kan worden benaderd.

Vermenigvuldigt men de eerste vergelijking van (10) met b_1 , de tweede met a_1 , dan vindt men voor de som der aldus verkregen vergelijkingen:

$$v ij + 6 \mu_3 b_o a_1 b_1 b_2 + 3 \mu_3 b_o (a_1^2 - b_1^2) a_2 = 0.$$

Evenzoo levert de som der respect. met b_2 en a_2 vermenigvuldigde vergelijkingen (11):

$$2 v z - 6 \mu_3 b_o a_1 b_1 b_2 - 3 \mu_3 b_o (a_1^2 - b_1^2) a_2 = 2 \omega C \hat{e} \cdot a_2.$$

Uit de som van beide bovenstaande vergelijkingen volgt:

$$a_2 = \frac{v (ij + 2 z)}{2 \omega C \hat{e}}. \quad (14)$$

Na substitutie van (14) is de tweede vergelijking van (11) te schrijven als:

$$- \frac{3}{2} \mu_3 b_o (b_1^2 - a_1^2) = - b_2 (\omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_o^2 - \frac{3}{2} \mu_3 ij - \frac{3}{4} \mu_3 z) + \\ + \frac{v^2 (ij + 2 z)}{2 \omega C \hat{e}} - \omega C \hat{e}.$$

Hiermee is (13) te herleiden tot:

$$z \left\{ (\omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_o^2 - \frac{3}{2} \mu_3 ij - \frac{3}{4} \mu_3 z)^2 + v^2 \right\} = - \omega^2 C^2 \hat{e}^2 - \\ - 2 \omega C \hat{e} b_2 (\omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_o^2 - \frac{3}{2} \mu_3 ij - \frac{3}{4} \mu_3 z) + \frac{9}{4} \mu_3^2 b_o^2 ij^2 + \\ + v^2 (ij + 2 z).$$

Hieruit volgt:

$$(b_2 N + \omega C \hat{e})^2 = \frac{9}{4} \mu_3^2 b_o^2 ij^2 + v^2 (ij + z) - a_2^2 N^2, \quad \text{waarin:}$$

$$N = \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_o^2 - \frac{3}{2} \mu_3 ij - \frac{3}{4} \mu_3 z.$$

Nu is dus:

$$b_2 N = -\omega C \hat{e} + n \sqrt{\frac{9}{4} \mu_3^2 b_0^2 \dot{ij}^2 + v^2 (\dot{ij} + z) - a_2^2 N^2}, \quad n^2 = 1.$$

Na quadratering volgt hieruit:

$$(b_2^2 + a_2^2) N^2 = z N^2 = \omega^2 C^2 \hat{e}^2 + \frac{9}{4} \mu_3^2 b_0^2 \dot{ij}^2 + v^2 (\dot{ij} + z) - \\ - 2 n \omega C \hat{e} \cdot \sqrt{\frac{9}{4} \mu_3^2 b_0^2 \dot{ij}^2 + v^2 (\dot{ij} + z) - a_2^2 N^2}.$$

Anders geschreven na substitutie van de in (14) gevonden waarde van a_2 :

$$2 n \omega C \hat{e} \sqrt{\frac{9}{4} \mu_3^2 b_0^2 \dot{ij}^2 + v^2 (\dot{ij} + z) - N^2} \cdot \frac{v^2 (\dot{ij} + 2z)^2}{4 \omega^2 C^2 \hat{e}^2} = \omega^2 C^2 \hat{e}^2 - \\ - z N^2 + \frac{9}{4} \mu_3^2 b_0^2 \dot{ij}^2 + v^2 (\dot{ij} + z).$$

Na quadratering is deze vergelijking te herleiden tot:

$$\left\{ \omega^2 C^2 \hat{e}^2 - z N^2 - \frac{9}{4} \mu_3^2 b_0^2 \dot{ij}^2 - v^2 (\dot{ij} + z) \right\}^2 = N^2 \dot{ij}^2 (9 \mu_3^2 b_0^2 z - v^2).$$

Nu is volgens (12) voor $\varepsilon = 0$:

$$\dot{ij} (9 \mu_3^2 b_0^2 z - v^2) = \dot{ij} \left(\frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_0^2 - \frac{3}{4} \mu_3 \dot{ij} - \frac{3}{2} \mu_3 z \right)^2.$$

Met gebruikmaking hiervan vindt men tenslotte:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 C^2 \hat{e}^2 - z N^2 - \frac{9}{4} \mu_3^2 b_0^2 \dot{ij}^2 - v^2 (\dot{ij} + z) = \\ = m \dot{ij} N \left(\frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_0^2 - \frac{3}{4} \mu_3 \dot{ij} - \frac{3}{2} \mu_3 z \right). \end{aligned} \right\} (15)$$

Waarin $m^2 = 1$.

Volgens (7) was:

$$d_0 = b_0 (\mu_1 + \mu_3 b_0^2 + \frac{3}{2} \mu_3 \dot{ij} + \frac{3}{2} \mu_3 z) + \frac{3}{4} \mu_3 b_2 (b_1^2 - a_1^2) + \frac{3}{2} \mu_3 a_1 b_1 a_2. \quad (7)$$

Vermenigvuldigt men de eerste vergelijking van (10) met $\frac{1}{4} a_1/b_0$, de tweede vergelijking van (10) met $\frac{1}{4} b_1/b_0$, dan levert het verschil van de aldus verkregen vergelijkingen op:

$$\frac{3}{4} \mu_3 b_2 (b_1^2 - a_1^2) + \frac{3}{2} \mu_3 a_1 b_1 a_2 = \\ = \frac{1}{4} \dot{ij}/b_0 \left(\frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_0^2 - \frac{3}{4} \mu_3 \dot{ij} - \frac{3}{2} \mu_3 z \right),$$

Hiermede is het mogelijk (7) te herleiden tot:

$$\left. \begin{aligned} d_0 = b_0 (\mu_1 + \mu_3 b_0^2 + \frac{3}{2} \mu_3 \dot{ij} + \frac{3}{2} \mu_3 z) + \\ + \frac{1}{4} \frac{\dot{ij}}{b_0} \left(\frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_0^2 - \frac{3}{4} \mu_3 \dot{ij} - \frac{3}{2} \mu_3 z \right). \end{aligned} \right\} (16)$$

Hiermede zijn we dan gekomen tot de vergelijkingen (12), (15) en (16) die den trillingstoestand bepalen.

Voor het beschouwde geval ($\varepsilon = 0$) is dus:

$$ij \left[\left(\frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_0^2 - \frac{3}{4} \mu_3 ij - \frac{3}{2} \mu_3 z \right)^2 + v^2 \right] = 9 \mu_3^2 b_0^2 ij z. \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 C^2 \dot{e}^2 = z \left(\omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_0^2 - \frac{3}{2} \mu_3 ij - \frac{3}{4} \mu_3 z \right)^2 + \\ + m ij \left(\frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_0^2 - \frac{3}{4} \mu_3 ij - \frac{3}{2} \mu_3 z \right) \times \\ \times \left(\omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_0^2 - \frac{3}{2} \mu_3 ij - \frac{3}{4} \mu_3 z \right) + \frac{9}{4} \mu_3^2 b_0^2 ij^2 + v^2 (ij + z). \end{aligned} \quad (15)$$

Waarin: $m^2 = 1$.

$$\begin{aligned} d_0 = b_0 \left(\mu_1 + \mu_3 b_0^2 + \frac{3}{2} \mu_3 ij + \frac{3}{2} \mu_3 z \right) + \\ + \frac{1}{4} \frac{ij}{b_0} \left(\frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_0^2 - \frac{3}{4} \mu_3 ij - \frac{3}{2} \mu_3 z \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Eliminatie van een der veranderlijken $\mu_3 b_0^2$, $\mu_3 ij$, $\mu_3 z$ uit deze vergelijkingen leidt tot onoplosbare hoogere machtsvergelijkingen van de andere onbekenden. Daarom zijn de oplossingen hier grafisch bepaald.

Voor het geval, dat er een tweede subharmonische aanwezig is, volgt uit (18):

$$\left(\frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_0^2 - \frac{3}{4} \mu_3 ij - \frac{3}{2} \mu_3 z \right)^2 - v^2 = 9 \mu_3 b_0^2 \cdot \mu_3 z. \quad (19)$$

Of, in anderen vorm geschreven:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{3}{2} \mu_3 z - \left(\frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{4} \mu_3 ij \right) \right\}^2 + \\ + \left\{ 3 \mu_3 b_0^2 - \left(\frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{4} \mu_3 ij \right) \right\}^2 = \left(\frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{4} \mu_3 ij \right)^2 - v^2. \end{aligned} \quad (19a)$$

Deze vergelijking heeft alleen reële wortels als:

$$\left(\frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - \frac{3}{4} \mu_3 ij \right)^2 - v^2 \geq 0.$$

$$\text{Of: } \frac{1}{4} \omega^2 C \geq \mu_1 + v + \frac{3}{4} \mu_3 ij.$$

De tweede subharmonische zal dus alleen optreden als:

$$\underline{\underline{\omega^2 C > 4 (\mu_1 + v)}}.$$

Uit (19) volgt:

$$\begin{aligned} \mu_3 ij = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_0^2 - \frac{3}{2} \mu_3 z \right) + \\ + r \cdot \frac{4}{3} \sqrt{9 \mu_3 b_0^2 \cdot \mu_3 z - v^2} \quad r^2 = 1. \end{aligned} \quad (19b)$$

Deze waarde van $\mu_3 ij$ in (16) gesubstitueerd, geeft:

$$d_o = b_o \left(\frac{1}{2} \omega^2 C - \mu_1 - 5 \mu_3 b_o^2 - \frac{9}{2} \mu_3 z + \frac{v^2}{3 \mu_3 b_o^2} \right) - r \cdot b_o \cdot \frac{\frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - 9 \mu_3 b_o^2 - \frac{9}{2} \mu_3 z}{3 \mu_3 b_o^2} \cdot \sqrt{9 \mu_3^2 b_o^2 z - v^2}. \quad (20)$$

Het is mogelijk vergelijking (20) af te beelden in het $\mu_2 b_o^2 - \mu_3 z$ vlak. Men vindt dan voor verschillende waarden van d_o krom-

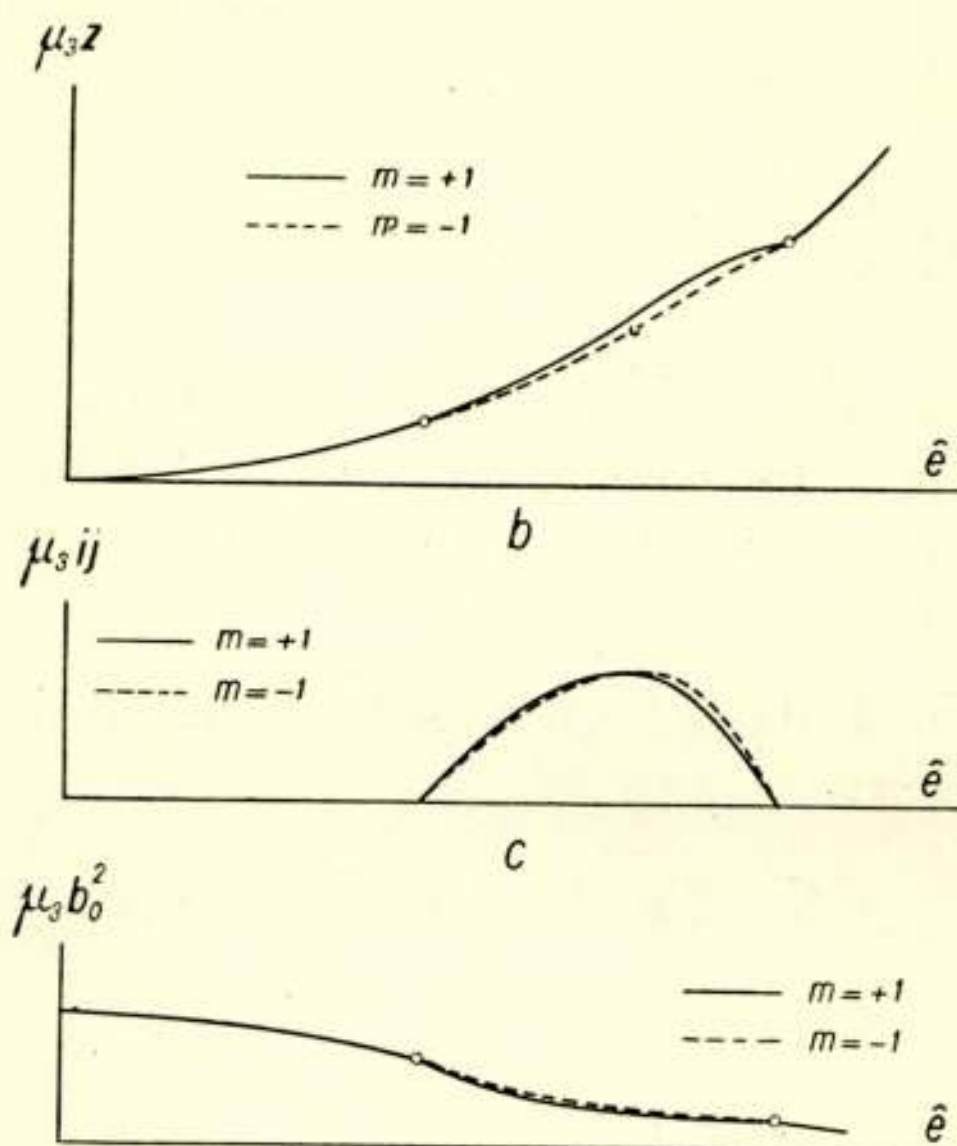


Fig. 13.

Amplitude der fluxcomponenten als functie van \hat{e} ,
bij aanwezigheid der tweede subharmonische.

men als de gestreepstippelde krommen $P_n Q_n$ in fig. 13a, die in de punten P_n en Q_n de ellips volgens (19a) voor $\mu_3 ij = 0$ snijdt. Voor het geval $\mu_3 ij = 0$ levert (16) de getrokken kromme in figuur (13a), voor welke kromme volgens (16) zal gelden:

$$d_o = b_o (\mu_1 + \mu_3 b_o^2 + \frac{3}{2} \mu_3 z). \quad (21)$$

Bij variatie van $\mu_3 z$ zal nu voor het geval dat b.v. $d_o = c_1$ achtereenvolgens worden doorlopen; de getrokken kromme $R_1 P_1$; de gestreepstippelde kromme $P_1 Q_1$; de getrokken kromme

$Q_1 S_1$, (19b) geeft voor elk punt van de gestreepstipte krommen $P_n Q_n$ de waarde van $\mu_3 \dot{ij}$.

Nu is voor ieder punt der krommen $R_n S_n$ de grootte van \hat{e} uit (15) te berekenen. Met behulp van de zoo gevonden waarden van \hat{e} , is het mogelijk het verloop der krommen: $\mu_3 z = f(\hat{e})$; $\mu_3 \dot{ij} = f(\hat{e})$ en $\mu_3 b_o^2 = f(\hat{e})$ te bepalen. Hiervoor vindt men de krommen van figuur 13b; 13c en 13d.

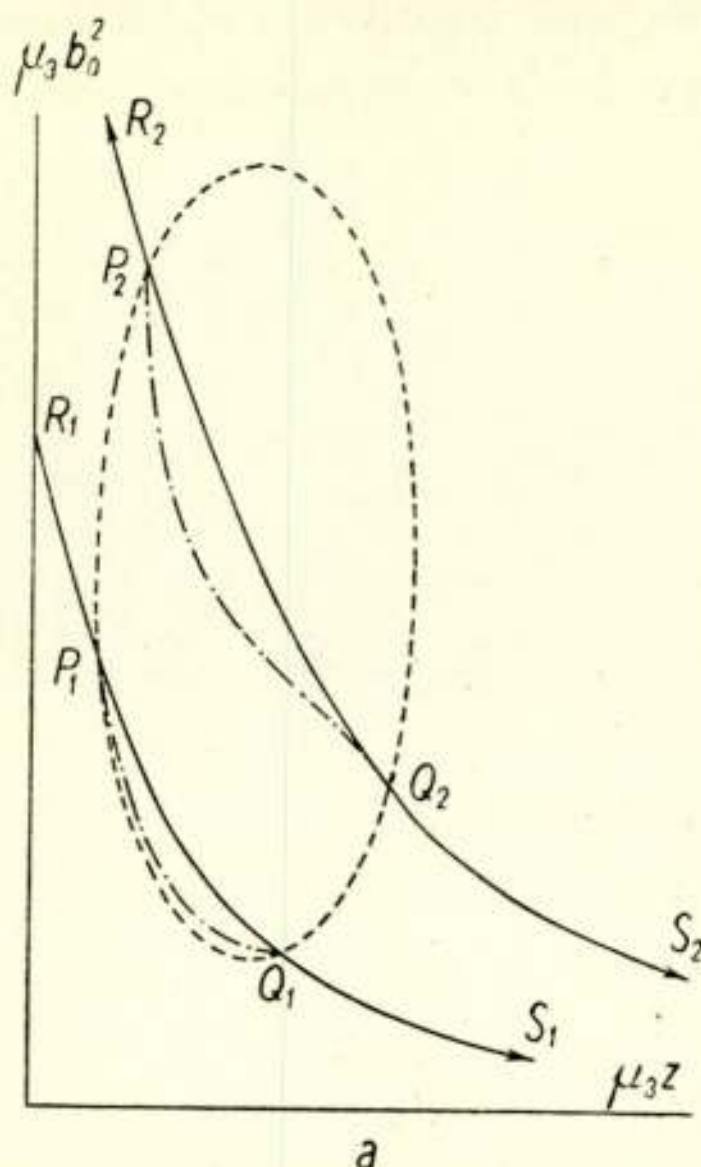


Fig. 13a.

Uit een aantal van deze krommen voor verschillende waarden van d_o en C kan men de gebieden in het $(\hat{e}, d_o)_C$, respect. het $(\hat{e}, C)_{d_o}$ vlak bepalen, waarbinnen de tweede subharmonische optreedt. Bij de aanname, dat aan de grenzen van deze gebieden $\mu_3 \dot{ij} = 0$ is, welke aanname berust op waarnemingen, kan men den vorm der bedoelde gebieden op eenvoudiger wijze vinden.

Capaciteit constant

De grenzen van het gebied in het d_o, \hat{e} vlak, waarbinnen bij een aangenomen waarde van C de tweede subharmonische kan optreden, worden gevonden door de snijpunten P_n en Q_n van de ellips $\mu_3 z = f(\mu_3 b_o^2)_{\mu_3 \dot{ij}=0}$, die (19a) voor deze waarde van C oplevert, met de krommen $\mu_3 z = f(\mu_3 b_o^2)$, die (21) voor verschillende waarden van d_o oplevert, te bepalen.

Met behulp van (15) is de grootte van \hat{e} in deze punten te bepalen. Men komt zodoende tot figuren als fig. 14, waarbinnen het gearceerde gebied de tweede subharmonische kan optreden.

Gelijkstroomsterkte constant.

Hier gaat het dus om de grenzen van het gebied in het C, \hat{e} vlak, waarbinnen voor een bepaalde waarde van d_0 de tweede subharmonische kan optreden.

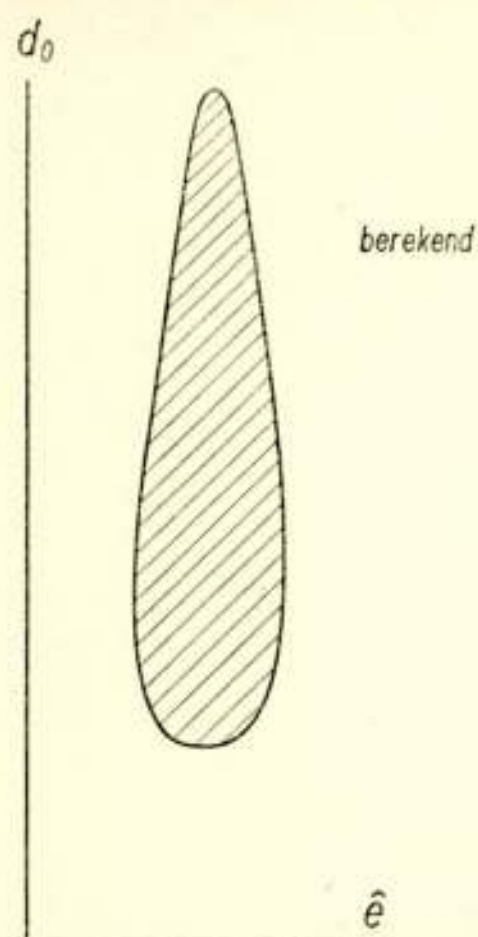


Fig. 14a.

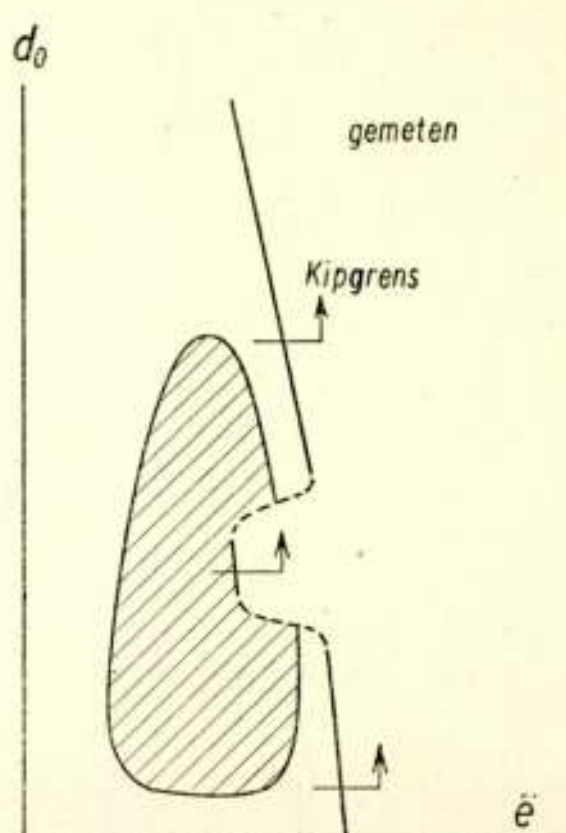


Fig. 14b.

Gebied, waarbinnen de tweede subharmonische optreedt, indien C constant wordt gehouden.

Men bepaalt hier de snijpunten P_n en Q_n van de kromme $\mu_3 z = f(\mu_3 b_0^2)$, die (21) voor deze waarde van d_0 oplevert, met de ellipsen $\mu_3 z = f(\mu_3 b_0^2)_{\mu_3 ij=0}$, die (19a) voor de verschillende waarden van C geeft.

Uit de coördinaten der snijpunten en (15) is dan weer de grootte van \hat{e} te berekenen. Ook hier gaf de berekening kwalitatief een vrij goede overeenkomst met het experiment, zie fig. 15a en 15b.

Is: $\frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_0^2 - \frac{3}{4} \mu_3 ij - \frac{3}{2} \mu_3 z = 0$, dan vallen de oplossingen voor $m = +1$ en $m = -1$ samen. (16) en (19) gaan in dit geval over in:

$$v^2 = 9 \mu_3 b_0^2 \cdot \mu_3 z.$$

$$d_0 = b_0 (\mu_1 + \mu_3 b_0^2 + \frac{3}{2} \mu_3 ij + \frac{3}{2} \mu_3 z).$$

Uit de laatste vergelijking volgt:

$$\frac{3}{2} \mu_3 \dot{y} + \frac{3}{2} \mu_3 z = \frac{d_0}{b_0} - \mu_1 - \mu_3 b_0^2.$$

Verder is: $\frac{3}{4} \mu_3 \dot{y} + \frac{3}{2} \mu_3 z = \frac{1}{4} \omega^2 C - \mu_1 - 3 \mu_3 b_0^2.$

$$\text{Volgt: } \mu_3 \dot{y} = \frac{4}{3} \left(\frac{d_0}{b_0} + 2 \mu_3 b_0^2 - \frac{1}{4} \omega^2 C \right). \quad (22)$$

$$\mu_3 z = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \omega^2 C - \mu_1 - 5 \mu_3 b_0^2 - \frac{d_0}{b_0} \right). \quad (23)$$

$$v^2 = 6 \mu_3 b_0^2 \left(\frac{1}{2} \omega^2 C - \mu_1 - 5 \mu_3 b_0^2 - \frac{d_0}{b_0} \right). \quad (24)$$

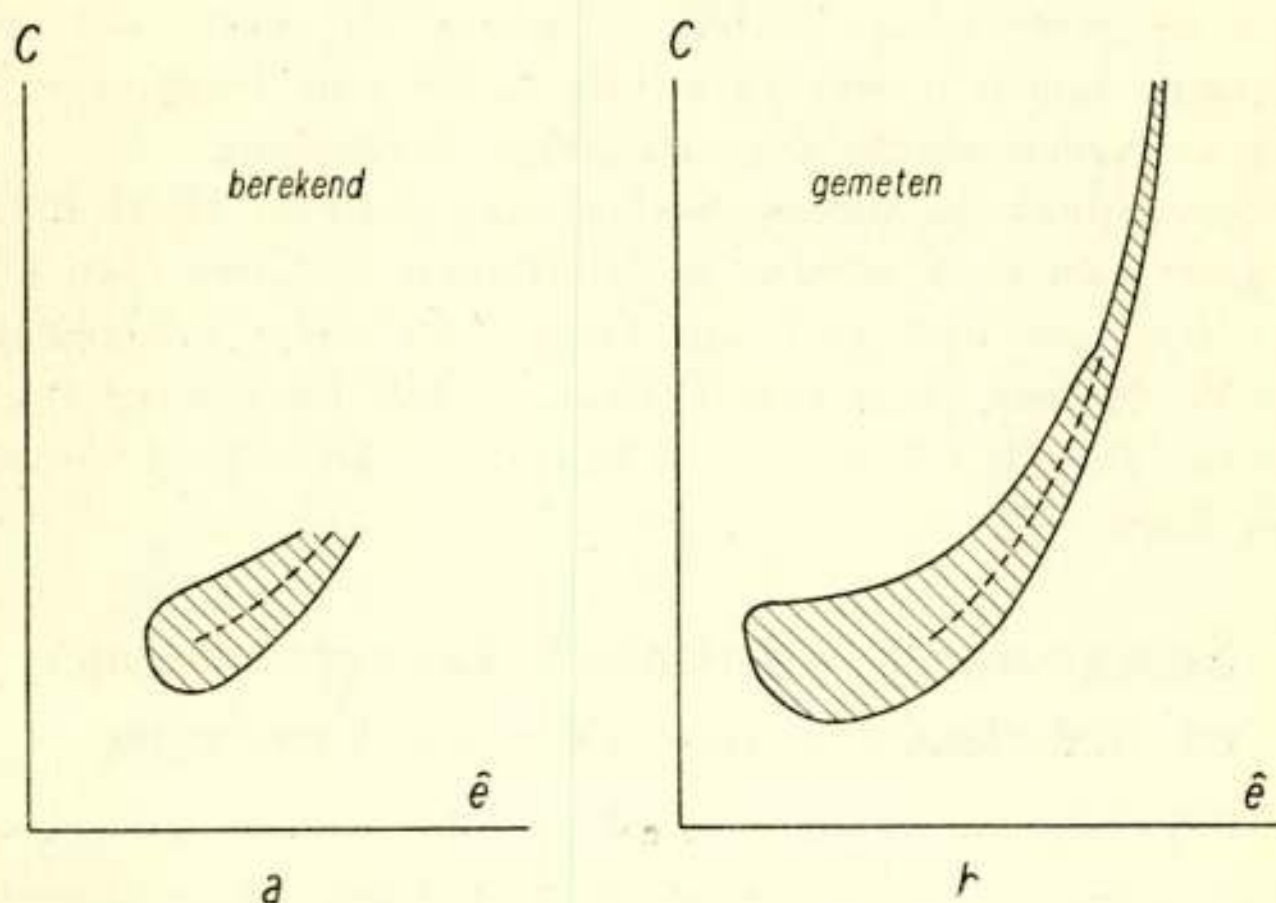


Fig. 15.

Gebied, waarbinnen de tweede subharmonische optreedt, indien d_0 constant wordt gehouden.

(24) kan reële wortels b_0 hebben, welke grafisch te bepalen zijn. Berekent men nu uit (22) en (23) de waarde van $\mu_3 \dot{y}$ en $\mu_3 z$ voor deze reële wortels b_0 , en uit (17) het verloop van $\hat{e} = f(C)$ voor de aldus gevonden positief reële waarden van $\mu_3 b_0^2$, $\mu_3 \dot{y}$ en $\mu_3 z$, dan komt men tot de gestreepte kromme in fig. 15 a.

Bij de waarnemingen werd bij corresponderende instellingen (zie gestreepte kromme fig. 15b) een afwijking in de periodiciteit van het verschijnsel gevonden. De tweede subharmonische was hier wel steeds aanwezig, maar er traden onregelmatige amplitude veranderingen op.

Dit verschijnsel laat vermoeden, dat één der waarden van m een stabiele oplossing geeft, de andere waarde van m niet. Vallen beide oplossingen samen, dan kan men een afwijkend gedrag van het circuit verwachten.

MEDEDEELINGEN

Afdeeling Technisch Wetenschappelijk Onderzoek van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs.

Deze afdeeling is op 31 Mei 1946 opgericht en bedoelt een verband te leggen tusschen de ingenieurs van alle vakrichtingen en academici, die zich met wetenschappelijk onderzoek op technisch gebied bezighouden. Daar de physica als wetenschap hierbij een groote rol speelt, ligt het in de bedoeling nauw samen te werken met de Sectie voor Toegepaste Natuurkunde van de Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging.

Voorzitter van de commissie van voorbereiding was Prof. Dr H. B. Dorgelo, de leden dezer commissie werden in het Bestuur verkozen, dat, nu onder voorzitterschap van Prof. Ir J. Th. Thijsse, als volgt is samengesteld: Dr Ir J. G. W. Mulder, secretaris, (Floralaan 159 Eindhoven) Prof. Dr Ir C. B. Biezeno, Prof. Ir J. J. Broeze, Ir C. Koning, Dr Ir W. J. Oosterkamp, Ir J. L. van Soest.

Samenwerking Nederlandsch Radiogenootschap en Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging.

Sinds 1942 bestond er samenwerking, die betrof het gezamenlijk houden van symposia, de wederzijdsche introductie op vergaderingen en de reductie op wederzijdsche tijdschriften. Wat dit laatste betreft is, wegens de hoge drukkosten, van beide zijden een reductie-vermindering toegepast moeten worden, die voor de intekenaren vóór Mei 1946 gedurende dit jaar nog niet geldt. Nieuwe intekenaren, leden van het genootschap echter krijgen het Ned. Tijdschrift voor Natuurkunde voor f 7.50.

Daarnaast vindt ook nog een samenwerking plaats met de groep den Haag van deze vereeniging; hierbij worden de convocaties dezer groep, voorzoover voor het Genootschap van belang, aan de leden toegezonden, die in of nabij den Haag wonen en worden de convocaties van de Haagsche vergaderingen van het Genootschap aan de groep den Haag van de Ned. Natuurkundige Vereeniging verstrekt.

Samenwerking Nederlandsch Radiogenootschap en Koninklijk Instituut van Ingenieurs afd. Electrotechniek.

Een samenwerking tusschen deze beide is voorbereid, waarop het Genootschap en de Afdeeling elkander zoo goed mogelijk op de hoogte houden van de te beleggen vergaderingen, excursies en dergelijke en daarvoor elkaar introductie verleen.