

ITERATIEVE BEPALING VAN DE FREQUENTIE VAN MECHANISCHE TRILLINGEN

door

J. J. KOCH

1. *Inleiding.*

De hier te behandelen methode tot het bepalen van de frequentie van vrije mechanische trillingen kan toegepast worden op ingewikkelde elastische systemen, met willekeurige massaverdeeling. Ter wille van de overzichtelijkheid zullen we ons echter beperken tot trillingen van rechte, voldoende ondersteunde staven, bezet met een eindig aantal puntvormige massa's. De staaf zelf wordt daarbij massaloos gedacht.

2. *De eigenschappen van een elastisch systeem, de invloedsgetallen, de stelling van Maxwell.*

Belasten we een voldoende ondersteund elastisch systeem met een kracht P , dan zullen de verschillende punten van het systeem zich verplaatsen. De versplaatsingen zijn daarbij evenredig met de kracht P (Wet van Hooke).

Hadden we het systeem op een andere plaats belast met een kracht Q , dan zouden de verplaatsingen, die daardoor veroorzaakt werden, evenredig met Q geweest zijn. We kunnen ons nu de vraag stellen, welke verplaatsingen de punten zullen ondergaan, wanneer de krachten P en Q beide werken. Volgens de wet der superpositie zullen deze verplaatsingen gelijk zijn aan de som van de verplaatsingen, door P en Q afzonderlijk opgewekt.

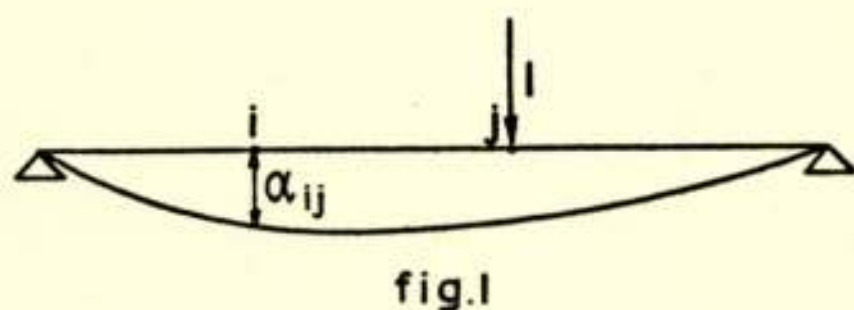
We beschouwen een staaf, die de eigenschap heeft, dat krachten werkende in een bepaald vlak door de staaf slechts verplaatsing in dat vlak teweeg brengen. In de meeste gevallen zijn voor een staaf twee van dergelijke vlakken aan te wijzen; deze twee vlakken staan loodrecht op elkaar.

De trillingen van de staaf zullen òf in het ééne, òf in het andere vlak plaats vinden.

In fig. 1 is een staaf geteekend, welke op 2 steunpunten rust. Wanneer de staaf in een willekeurig punt j belast is met een éénheidskracht, loodrecht op de staaf, zij de verplaatsing van een ander willekeurig punt i a_{ij} . Deze a_{ij} , de verplaatsing van het punt i tengevolge van een éénheidskracht in het punt j , noemen we een invloedsgetal. Zijn bij een staaf, waarop we n punten aangegeven hebben, alle n^2 invloedsgetallen bekend, dan kunnen we bij een gegeven laststelsel, aangrijpende in de n punten de verplaatsing van elk van deze n punten bepalen. Wordt de kracht, werkende op het j -de punt P_j genoemd, dan vinden we voor de zakking van het i^e -punt:

$$y_i = \sum_{j=1}^n P_j a_{ij} \quad (1)$$

Tusschen de verschillende invloedsgetallen bestaat nog de be-



langrijke betrekking, de stelling van Maxwell, volgens welke:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (2)$$

3. Het opstellen van de trillingsvergelijkingen.

Wanneer de staaf uit fig. 1 bezet is met n puntvormige massa's ($m_1, m_2 \dots m_i, m_j \dots m_n$), kunnen we nagaan, welke harmonische vrije trillingen deze staaf kan uitvoeren. Daar geen demping aanwezig is, is te verwachten, dat de trillingen van de verschillende massa's met elkaar in fase zijn. Voor de j^e -massa geldt dan:

$$z_j = \eta_j \cos \omega t \quad (j = 1 \dots n), \quad (3)$$

waarin z_j de momenteele waarde van de verplaatsing, η_j de amplitude en ω de cirkelfrequentie voorstelt. De kracht nodig om de massa deze beweging te laten uitvoeren is gelijk aan:

$$m_j \ddot{z}_j = -\omega^2 m_j \eta_j \cos \omega t \quad (j = 1 \dots n) \quad (4)$$

en wordt op de massa uitgeoefend door de staaf. De staaf ondervindt daardoor van de massa de tegengestelde kracht:

$$P_j = -m_j \ddot{z}_j = \omega^2 m_j \eta_j \cos \omega t \quad (j = 1 \dots n). \quad (5)$$

Tengevolge van de krachten P_j wordt de verplaatsing van de massa volgens verg. 1:

$$z_i = \eta_i \cos \omega t = \sum_{j=1}^n P_j a_{ij} = \omega^2 \cos \omega t \sum_{j=1}^n m_j \eta_j a_{ij} \quad (j = 1 \dots n) \quad (6)$$

of na deeling door $\omega^2 \cos \omega t$:

$$\frac{1}{\omega^2} \eta_i = \sum_{j=1}^n m_j a_{ij} \eta_j \quad (i = 1 \dots n). \quad (7)$$

Deze n , in de grootheden η_i homogene, vergelijkingen laten slechts dan een van nul verschillende oplossing toe, wanneer de determinant van de n^e -orde, gevormd uit de coëfficiënten, nul is, dat wil zeggen, wanneer:

$$\begin{vmatrix} m_1 a_{11} - \frac{1}{\omega^2} & m_2 a_{12} & \dots & m_n a_{1n} \\ m_1 a_{21} & m_2 a_{22} - \frac{1}{\omega^2} & \dots & m_n a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 a_{n1} & m_2 a_{n2} & \dots & m_n a_{nn} - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

Verg. 8 stelt een n^e -machtsvergelijking voor in $\frac{1}{\omega^2}$.

4. Realiteit van de wortels van verg. 8.

Door de rijen van de determinant van verg. 8 met $\sqrt{m_1}$, $\sqrt{m_2}$, ..., $\sqrt{m_n}$ te vermenigvuldigen en de kolommen door resp. $\sqrt{m_1}$, $\sqrt{m_2}$, ..., $\sqrt{m_n}$ te deelen, gaat deze over in een seculairvergelijking, daar de determinant dan — omdat $a_{ij} = a_{ji}$ — ten opzichte van de diagonaal symmetrisch is geworden. Zijn bij een seculairvergelijking alle coëfficiënten reëel, dan zijn ook alle wortels reëel.

Het is echter eveneens van belang te weten, of de wortels positief of negatief zijn, omdat een negatieve waarde van $\frac{1}{\omega^2}$

leidt tot een imaginaire waarde van ω . Om na te gaan, of er ook negatieve wortels kunnen optreden, schrijven we de determinant van verg. 8 uit.

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{\omega^2}\right)^n + \{m_1 a_{11} + m_2 a_{22} + \dots\} \left(-\frac{1}{\omega^2}\right)^{n-1} \\ & + \left\{ \begin{vmatrix} m_1 a_{11} & m_2 a_{12} \\ m_1 a_{21} & m_2 a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_2 a_{22} & m_3 a_{23} \\ m_2 a_{32} & m_3 a_{32} \end{vmatrix} + \dots \right\} \left(-\frac{1}{\omega^2}\right)^{n-2} \quad (9) \\ & + \dots = 0. \end{aligned}$$

Kunnen we bewijzen dat alle in verg. 9 voorkomende onderdeterminanten positief zijn, dan heeft verg. 9 geen variaties dus geen positieve wortels van $-\frac{1}{\omega^2}$. Daar alle wortels reëel zijn, zal $+\omega^2$ altijd positief zijn.

Omdat de massa's alle positief zijn, behoeven we slechts te bewijzen dat:

$$a_{ii} > 0; \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} > 0; \text{ enz..}$$

Nu is a_{ii} altijd positief, omdat a_{ii} de verplaatsing is van het punt i , door een éénheidskracht daar ter plaatse. Het zou nl. onlogisch zijn, dat een punt van de staaf, wanneer het punt zelf belast wordt, zich tegen de richting van de kracht in zou bewegen.

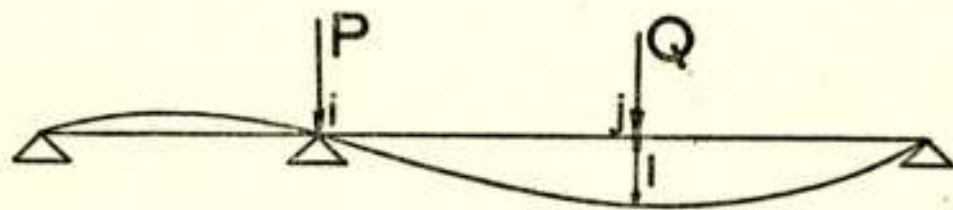


fig. 2

Ondersteunen we de staaf (zie fig. 2) in het punt i , waarbij het steunpunt een kracht P op de staaf zal uitoefenen en plaatsen we in het punt j een kracht Q , zoo groot, dat de doorbuiging daar ter plaatse 1 wordt, dan zal Q zeker positief zijn. Q is te bepalen uit:

$$\left. \begin{aligned} y_i &= P a_{ii} + Q a_{ij} = 0 \\ y_j &= P a_{ji} + Q a_{jj} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$Q = \frac{\begin{vmatrix} a_{ii} & 0 \\ a_{ji} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}} = \frac{a_{ii}}{\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}} \quad (11)$$

Q is positief, a_{ii} is positief, dus moet de noemerdeterminant ook positief zijn.

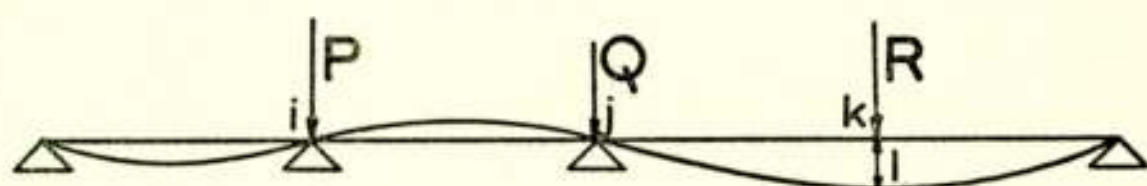


fig. 3

Zoo verder gaande plaatsen we de staaf in de punten i en j op vaste steunpunten en belasten haar in het punt k met een kracht R , zoo groot, dat de doorbuiging daar ter plaatse 1 wordt. Evenals in verg. 10 en 11 vinden we voor dit geval:

$$R = \frac{\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}} \quad (12)$$

R is positief, van de tellerdeterminant is zoo juist bewezen, dat zij positief is, zoodat de noemerdeterminant ook positief moet zijn. Zoo voortgaande is te bewijzen, dat alle symmetrische onderdeterminanten positief zijn, zoodat alle wortels van $\frac{1}{\omega^2}$ uit verg. 8 en 9 positief moeten zijn.

Wanneer de steunpunten niet veerend zijn, kan ook bewezen worden, dat de wortels verschillend zijn. Hiervoor zij verwezen naar de literatuur ¹⁾.

Resumeerende blijkt, dat verg. 8 uitsluitend positieve reële en verschillende wortels heeft, zoodat er n waarden ω_k^2 ($k = 1 \dots n$) bestaan, waarbij aan de verg. 7 door van nul verschillende waarden η_i wordt voldaan. Deze waarden van ω_k^2 , de eigenwaarden van het probleem, worden gerangschikt naar hun grootte, zoo, dat $\omega_1^2 < \omega_2^2 < \omega_3^2 \dots < \omega_n^2$.

¹⁾ C. B. Biezeno, Critical speeds of rotating shafts. Proceed. Nederl. Akademie van Wetenschappen, Vol. XLIII, No. 9, 1940.

Substitueeren we echter de uit verg. 7 volgende waarden van η_{li} , dan krijgen we:

$$\sum_{i=1}^n m_i \eta_{ki} \eta_{li} = \omega_l^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j a_{ij} \eta_{lj} \eta_{ki}. \quad (17)$$

De uitdrukkingen onder het $\Sigma \Sigma$ -teeken in verg. 16 en 17 zijn aan elkaar gelijk, hetgeen onmiddellijk blijkt wanneer we in het tweede lid van verg. 17 i en j verwisselen en daarna, gebruikmakende van de stelling van Maxwell $a_{ij} = a_{ji}$ stellen. We vinden dus:

$$\omega_k^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j a_{ij} \eta_{kj} \eta_{li} = \omega_l^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j a_{ij} \eta_{ki} \eta_{lj} \quad (18)$$

zoodat, wanneer $\omega_k^2 \neq \omega_l^2$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j a_{ij} \eta_{kj} \eta_{li} = 0 \quad (19)$$

Uit verg. 16 en 19 volgt daarna:

$$\sum_{i=1}^n m_i \eta_{ki} \eta_{li} = 0, \text{ voor } \omega_k^2 \neq \omega_l^2,$$

dus blijkens § 4; voor $k \neq l$.

7. Convergentiebewijs van de oude benaderingsmethode.

Een algemeen gebruikelijke methode tot het bepalen van de eerste (laagste) eigenwaarde is de volgende: Neem een willekeurige doorbuiging y_i van de staaf aan, d.w.z. neem een willekeurig stel waarden y_{1i} ($i = 1 \dots n$) aan voor de doorbuigingen der massapunten m_i ($i = 1 \dots n$) en laat in die punten in de richting y_{1i} krachten werken van de grootte $m_i y_{1i}$ (amplitude van de krachten, welke de massa's op de staaf uitoefenen bij $\omega = 1$). Noem de bij deze krachten optredende doorbuigingen y_{2i} en herhaal het proces zóólang, totdat twee opeenvolgende krommen y_{p-1} en y_p gelijkvormig zijn. Het quotiënt

$$\frac{y_{p-1}}{y_p} = \omega_1^2 \quad (20)$$

bepaalt de eerste eigenwaarde ω_1^2 van ω^2 .

We zullen de juistheid van deze uitspraak nader onderzoeken met behulp van de leer der eigenoplossingen. We analyseren daartoe y_i in de eigenoplossingen van de staaf, hetgeen steeds mogelijk is, daar er n doorbuigingen y_{1i} en ook n lineair

doend groote waarde van p een bevredigende benaderingsoplossing geeft. In de meeste gevallen is het voldoende $p = 3$ te nemen.

8. Nieuwe benaderingsmethode.

Het is echter mogelijk reeds uit de waarden van y_{1i} en y_{2i} ω_1^2 met zeer groote nauwkeurigheid te bepalen en wel uit:

$$\omega_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_{1i} y_{2i}}{\sum_{i=1}^n m_i y_{2i}^2} \quad (27)$$

Substitueeren we voor y_{1i} en y_{2i} de waarde uit verg. 21 en 24 in 27, dan vinden we, gebruik makende van de orthogonaliteit en het genormeerd zijn van de eigenfuncties:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i y_{1i} y_{2i} &= \sum_{i=1}^n m_i \{a_1 \eta_{1i} + a_2 \eta_{2i} + \dots + a_n \eta_{ni}\} \\ &\quad \left\{ \frac{a_1}{\omega_1^2} \eta_{1i} + \frac{a_2}{\omega_2^2} \eta_{2i} + \dots + \frac{a_n}{\omega_n^2} \eta_{ni} \right\} = \\ &= \frac{a_1^2}{\omega_1^2} \sum_{i=1}^n m_i \eta_{1i}^2 + \frac{a_2^2}{\omega_2^2} \sum_{i=1}^n m_i \eta_{2i}^2 + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^2} \sum_{i=1}^n m_i \eta_{ni}^2 = \\ &= \frac{a_1^2}{\omega_1^2} + \frac{a_2^2}{\omega_2^2} + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^2} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i y_{2i}^2 &= \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \frac{a_1}{\omega_1^2} \eta_{1i} + \frac{a_2}{\omega_2^2} \eta_{2i} + \dots + \frac{a_n}{\omega_n^2} \eta_{ni} \right\}^2 = \\ &= \frac{a_1^2}{\omega_1^4} \sum_{i=1}^n m_i \eta_{1i}^2 + \frac{a_2^2}{\omega_2^4} \sum_{i=1}^n m_i \eta_{2i}^2 + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^4} \sum_{i=1}^n m_i \eta_{ni}^2 = \\ &= \frac{a_1^2}{\omega_1^4} + \frac{a_2^2}{\omega_2^4} + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^4} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n m_i y_{1i} y_{2i}}{\sum_{i=1}^n m_i y_{2i}^2} = \frac{\frac{a_1^2}{\omega_1^2} + \frac{a_2^2}{\omega_2^2} + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^2}}{\frac{a_1^2}{\omega_1^4} + \frac{a_2^2}{\omega_2^4} + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^4}} = \omega_1^2 \frac{1 + \frac{a_2^2}{a_1^2} \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_1^2} \frac{\omega_1^2}{\omega_n^2}}{1 + \frac{a_2^2}{a_1^2} \frac{\omega_1^4}{\omega_2^4} + \dots + \frac{a_n^2}{a_1^2} \frac{\omega_1^4}{\omega_n^4}} \quad (30)$$

Deelen we teller en noemer van de laatste breuk uit verg. 30 op elkaar en verwaarloozen we de termen, waarin $\frac{\omega_1}{\omega_k}$ ($k = 2 \dots n$)

in een zesde of hogere macht voorkomt, dan gaat het laatste lid van verg. 30 over in:

$$\omega_1^2 \left\{ 1 + \frac{a_2^2 \omega_1^2}{a_1^2 \omega_2^2} \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right) + \dots + \frac{a_n^2 \omega_1^2}{a_1^2 \omega_n^2} \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_n^2} \right) \right\}. \quad (31)$$

Verwaarloozen we bovendien de termen met $k = 3 \dots n$ omdat $\frac{\omega_1^2}{\omega_k^2}$ met k zeer sterk afneemt (meestal ongeveer evenredig met $\frac{1}{k^4}$), dan gaat verg. 31 weer over in:

$$\omega_1^2 \left\{ 1 + \frac{a_2^2 \omega_1^2}{a_1^2 \omega_2^2} \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right) \right\} \approx \omega_1^2, \quad (32)$$

zoodat verg. 27 met een relatieve fout van ongeveer $\frac{a_2^2 \omega_1^2}{a_1^2 \omega_2^2} \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right)$ bevredigd wordt. Nu zal $\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}$ in een normaal geval ongeveer $1/16$

bedragen, terwijl $\frac{a_2^2}{a_1^2}$ bij doelmatige keuze van y_1 niet grooter dan $1/100$ behoeft te zijn. De relatieve fout in ω_1^2 zal dus in het algemeen kleiner dan $0,1\%$ zijn.

Willen we een nog grootere nauwkeurigheid bereiken, dan construeeren we bovendien de kromme y_3 en bepalen de eerste eigenwaarde uit:

$$\omega_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_{2i} y_{3i}}{\sum_{i=1}^n m_i y_{3i}^2}, \quad (33)$$

waarbij de optredende relatieve fout slechts ongeveer

$$\frac{a_2^2}{a_1^2} \cdot \frac{\omega_2^6}{\omega_2^6} \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right) \text{ bedraagt.}$$

9. Het bepalen van de hogere eigenwaarde en eigenoplossingen.

Herhalen we het in § 7 beschreven iteratieproces een voldoende aantal keeren en wel zooveel maal, tot twee opeenvolgende iteraties y_{p-1} en y_p gelijkvormig zijn, dan zal y_p met η_1 gelijkvormig zijn en kunnen we de genormeerde eigenfunctie η_1 uit y_p berekenen:

$$\eta_{1i} = \frac{y_{1i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n m_i y_{1i}^2}} \quad (i = 1 \dots n). \quad (34)$$

Bij een verstandige keuze van y_1 kunnen we meestal volstaan met één keer het beschreven proces toe te passen ($p = 2$).

We nemen nu een kromme u_1 aan en bepalen in de ontwikkeling:

$$u_{1i} = \sum_{k=1}^n a_k \eta_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \quad (35)$$

de coëfficiënt a_1 . Dit geschiedt naar analogie van de wijze, waarop bij een functie de coëfficiënten van haar Fourierreeksontwikkeling worden gevonden. We vermenigvuldigen dus beide leden van verg. 35 met $m_i \eta_{1i}$ en sommeeren daarna de beide leden over i . Men vindt dan:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i u_{1i} \eta_{1i} &= \sum_{i=1}^n \eta_{1i} \sum_{k=1}^n m_i a_k \eta_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_i a_k \eta_{ki} \eta_{1i} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n m_i a_k \eta_{ki} \eta_{1i} = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{i=1}^n m_i \eta_{ki} \eta_{1i}. \end{aligned} \quad (36)$$

Wegens de orthogonaliteit van η_k en η_1 ($k \neq 1$) wordt dit:

$$a_1 \sum_{i=1}^n m_i \eta_{1i}^2 = a_1.$$

Bepalen we daarna een nieuwe functie \bar{u}_1 uit:

$$\bar{u}_{1i} = u_{1i} - a_1 \eta_{1i} = \sum_{k=2}^n a_k \eta_{ki}, \quad (37)$$

dan zal deze functie in haar ontwikkeling naar de eigenoplossingen geen term met η_{1i} bevatten. Op deze \bar{u}_1 wordt het in § 7 aangegeven proces toegepast, waardoor een kromme u_2 verkregen wordt. Door onnauwkeurigheid in de constructie of de berekening van a_1 zal echter de eerste eigenfunctie voor een zeker bedrag in \bar{u}_1 zijn blijven steken en dus vermenigvuldigd met den factor $\frac{1}{\omega_1}$ in u_2 ingeslopen zijn. Evenals uit u_1 kan dit bedrag wederom uit u_2 verwijderd worden, waardoor een kromme \bar{u}_2 ontstaat, welke η_1 niet bevat. We vinden nu evenals we in § 8 uit y_1 en y_2 de eerste eigenwaarde vonden, uit \bar{u}_1 en \bar{u}_2 de tweede eigenwaarde.

$$\frac{\sum_{i=1}^n m_i \overline{u_{1i}} \overline{u_{2i}}}{\sum_{i=1}^n m_i \overline{u_{2i}}^2} = \frac{\frac{a_2^2}{\omega_2^2} + \frac{a_3^2}{\omega_3^2} + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^2}}{\frac{a_2^2}{\omega_2^4} + \frac{a_3^2}{\omega_3^4} + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^4}} \cong \omega_2^2. \quad (38)$$

De tweede eigenoplossing wordt op een factor na meestal voldoende nauwkeurig door $\overline{u_2}$ voorgesteld, nl. steeds dan, wanneer $\overline{u_1}$ en $\overline{u_2}$ blijken ongeveer gelijkvormig te zijn. Laat deze gelijkvormigheid te wenschen over, dan kunnen we achtereenvolgens $\overline{u_3}$, $\overline{u_4}$... $\overline{u_f}$ berekenen.

Tot het bepalen van de derde eigenwaarde gaan we uit van een kromme $\overline{v_1}$, die noch de eerste noch de tweede eigenoplossing bevat, welke kromme analoog met $\overline{u_1}$ bepaald wordt. Zoo voortgaande zijn ook, zij het met aanmerkelijk meer rekenwerk de hogere eigenwaarden te bepalen.

TELEFONIEFILTERS EN DE INVLOED VAN AFSLUITING EN VAN VERLIEZEN OP HUNNE EIGENSCHAPPEN

door

J. F. SCHOUTEN

*Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips'
Gloeilampenfabrieken, Eindhoven — Holland*

*(Voordracht gehouden voor het Nederlandsch Radiogenootschap
op 15 October 1945).*

Samenvatting.

Er is een groot verschil in de wijze van behandelen van filters voor radio- resp. telefoniedoeleinden. Radiofilters bouwt men gewoonlijk op als een samenstel van gekoppelde kringen, terwijl telefoniefilters gewoonlijk worden berekend vanuit een beschouwing over het oneindig lange filter. Men kan het telefoniefilter beschouwen als een kabel waarbij de continu verdeelde serie- en paralleladmittanties in discrete punten zijn geconcentreerd. Mathematisch gesproken komt dit neer op de overgang van een differentiaalvergelijking naar een differentievergelijking. Het gedrag van het eindige filter kan men begrijpen door uit de golfweerstand en de afsluitingsimpedanties de reflecties der golven aan in- en uitgangszijde van het filter na te gaan.

Onderstelt men, dat alle elementen van een netwerk zijn behept met dezelfde verliesmaat k , dan is de invloed der verliezen op de eigenschappen van het netwerk terug te voeren op het mathematisch probleem van het bepalen van een functie van complex argument, wanneer deze functie voor imaginair argument gegeven is. De theorie der complexe functies leidt

dan tot een aantal interpretaties, waarvan een drietal nader onder oogen wordt gezien, met bijzondere nadruk op de anschouwelijke voorstelling daarvan.

De differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann leiden tot de methode van de loodrechte afgeleide. Als tweede methode leidt de differentiaalvergelijking van Laplace tot de mogelijkheid de damping en phase van een filter als functie van de frequentie in de verliesmaat voor te stellen met behulp van zeepvliesmodellen. De integraal van Cauchy tenslotte leidt een interpretatie analoog aan de onscherpe afbeelding in de optica.

Er bestaat, met zekere beperking, een verband tusschen damping en phase van een netwerk als functie van de frequentie. Dit verband berust uiteindelijk op het oorzakelijk verband, dat tusschen b.v. ingangs- en uitgangsspanning van een netwerk bestaat.

Als voorbeeld van de gegeven beschouwingen wordt vooral het laagdoorlatende filter van het grondtype, als prototype van meer ingewikkelde filters, behandeld.

§ 1. *Het radio- en het telefoniefilter.*

Een electrisch filter heeft ten doel bepaalde gebieden uit het frequentiegebied geheel of gedeeltelijk door te laten, andere geheel of gedeeltelijk te dempen. Het merkwaardige is, dat men bij het ontwikkelen van filters voor radiodoeleinden gewoonlijk gebruik maakt van een volkomen andere gedachten-gang dan wanneer dit geschiedt voor toepassing op het telefoniegebied.

In de radio bestaat het eenvoudigste filter uit een enkele afgestemde kring, die is opgebouwd uit een zelfinductie en een capaciteit. Meer ingewikkelde filters kan men denken opgebouwd te zijn uit een samenstel van eenige afgestemde kringen die door koppel-elementen verbonden zijn. De mathematische wijze van behandelen sluit onmiddellijk aan bij deze gedachten-gang door van afzonderlijke afgestemde kringen uit te gaan (1). Het is duidelijk, dat deze wijze van behandelen nauw samenhangt met de successieve opbouw uit afzonderlijke elementen of kringen. Zij zal haar zin verliezen naarmate het filter ingewikkelder wordt. Dit beperkt dan ook het toepassingsgebied in hoofdzaak tot de radio, waar men meestal eenvoudige filters bezigt.

In de telefonie volgt men een geheel andere gedachtengang, door aan te sluiten bij de eigenschappen van de elektrische kabel. Men is daarmee in staat de eigenschappen van een filter, bestaande uit een oneindig aantal identieke cellen, exact af te leiden. De eigenschappen van het eindige filter bestaande uit een gering aantal, bij voorbeeld twee tot zes, cellen zullen daarvan des te meer afwijken, naarmate het aantal cellen geringer is. Ook deze afwijkingen zijn echter in rekening te brengen. Deze methode zal haar zin verliezen naarmate het filter eenvoudiger wordt. Het toepassingsgebied is dan ook in hoofdzaak beperkt tot de telefonie, en wel in het bijzonder tot de draaggolftelefonie, waar men over het algemeen zeer samengestelde en relatief breede filters bezigt.

Wij zullen eerst de gedachtengang uiteenzetten, die het filterprobleem terug brengt tot een variant van het kabelprobleem. Dit leidt dan tevens tot een formulering van de invloed van de eindige lengte van het filter. Tenslotte zullen wij dieper ingaan op de invloed, die de verliezen der onderdeelen uitoefenen op het gedrag van elektrische netwerken.

§ 2. Het telefoniefilter als discrete kabel.

De voortplanting van stroom en spanning door een kabel kan men voorstellen als de voortplanting van een elektrische

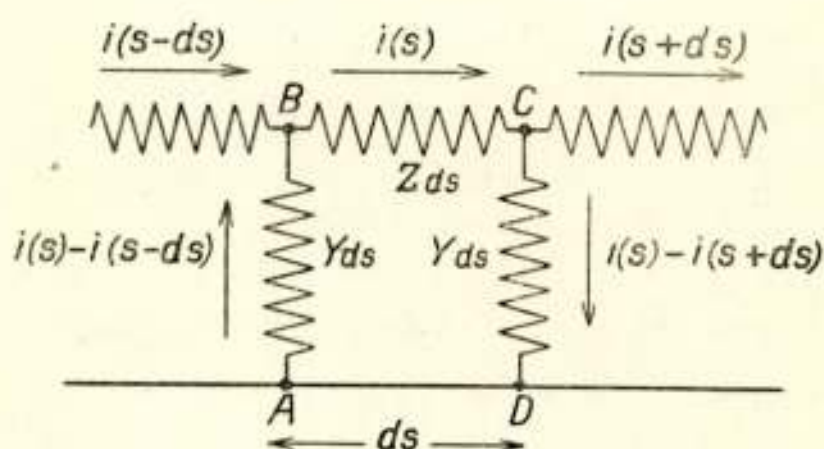


Fig. 1.

Schematische voorstelling van de continue kabel.

golf. Deze voortplanting kan men karakteriseeren door een voortplantingsconstante, die bestaat uit een reëel deel, dat de verandering van de *amplitude* per lengte-eenheid van de kabel (de *damping*) en uit een imaginair deel, dat de *phaseverandering* van de golf per lengte-eenheid van de kabel aangeeft. Deze phaseverandering hangt onmiddellijk samen met de voortplantingssnelheid van de golf langs de kabel.

De spanningsval langs de kabel ontstaat door de spanningsval langs de serieimpedantie van de kabel. De stroomverandering langs de kabel ontstaat door de lekstroom langs de paralleladmittantie van de kabel.

Noemen wij de serieimpedantie per lengteeenheid Z , de paralleladmittantie per lengte eenheid Y , dan verkrijgen wij voor de som der spanningen in de maas $ABCD A$ (fig. 1)

$$\frac{-i(s-ds) + 2i(s) - i(s+ds)}{Y ds} + i(s) Z ds = 0$$

of, wanneer wij voor de continue kabel tot de limiet $ds = 0$ overgaan,

$$\frac{d^2 i}{ds^2} = YZi. \quad (1)$$

Hiervan luidt een oplossing

$$i(s) = i(o)e^{-\sqrt{YZ} \cdot s} = i(o)e^{-\Theta s} = i(o)e^{-(\alpha + j\beta)s} \quad (2),$$

waarin de voortplantingsconstante Θ de som is van een reëel gedeelte, de demping α , en een imaginair gedeelte, de phasedraaiing β , beide per lengteeenheid van de kabel.

In het eenvoudigste geval, dat de serieimpedantie van de kabel zuiver inductief en de paralleladmittantie zuiver capacitef is, wordt $Z = j\omega L$ en $Y = j\omega C$, zoodat

$$i(s) = i(o)e^{-j\omega\sqrt{LC} \cdot s} \quad (3)$$

en dus

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC}.$$

De demping α is dus nul, de phasedraaiing β recht evenredig met de frequentie. Demping treedt eerst op wanneer bijv. de zelfinductie een serieweerstand vertoont.

Denkt men zich meer algemeen de serieimpedantie en de paralleladmittantie te bestaan uit willekeurige verliesvrije impedanties dan blijft de voortplantingsconstante imaginair. *Het continue verliesvrije medium vertoont dus nimmer het optreden van dempingsgebieden.* Wij gebruiken hier het woord medium, omdat de geldigheid van de stelling niet tot de kabel is beperkt, doch meer algemeen van kracht is voor eenig medium, waarin zich een golf voortplant.

Wij gaan thans over tot het filter, dat wij ons denken opgebouwd uit een oneindig aantal onderling gelijke cellen. Wij

moeten nu in aanmerking nemen, dat de limietovergang naar oneindig kleine afstanden, die wij hierboven toepasten, niet meer is geoorloofd. Serieïmpedantie en paralleladmittantie zijn nu in discrete punten geconcentreerd. Wij stuiten als het ware op de atomistiek van de kabel.

In de maas $ABCD$ (fig. 2) geldt nu

$$\frac{-i(s - \Delta s) + 2i(s) - i(s + \Delta s)}{Y \Delta s} + i(s) Z \Delta s = 0 ,$$

hetgeen wij kunnen schrijven als

$$\frac{\Delta^2 i}{\Delta s^2} = Y Z i , \quad (4)$$

waarbij $\frac{\Delta^2 i}{\Delta s^2}$ het tweede differentiequotiënt van i naar s voorstelt (2). Hiermede is dus, in navolging van van der Pol (2), het gedrag van het filter gekarakteriseerd door een differentievergelijking. Een oplossing hiervan, naar men door substitutie gemakkelijk kan verifiëren, luidt:

$$i(s) = i(0)e^{-\frac{2s}{\Delta s} \operatorname{arsinh} \left(\frac{\sqrt{YZ}}{2} \Delta s \right)} . \quad (5)$$

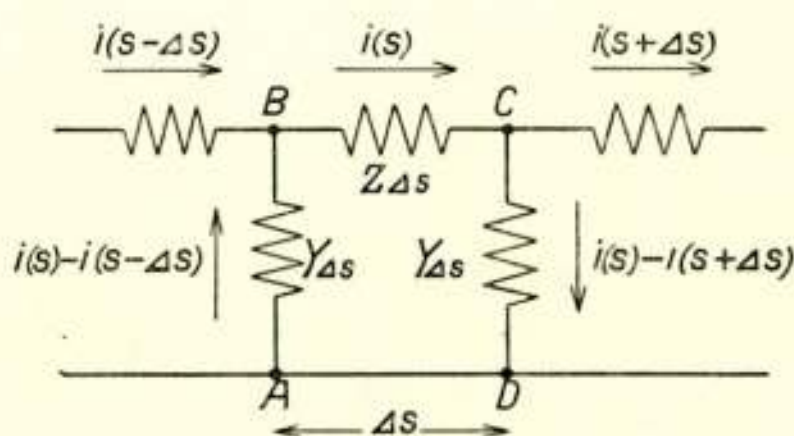


Fig. 2.

Schematische voorstelling van de discrete kabel (het filter).

Wij merken allereerst op, dat voor zeer kleine Δs de functie $\operatorname{arsinh} \left(\frac{\sqrt{YZ}}{2} \Delta s \right)$ te vervangen is door het argument, waardoor de vergelijking (5) in de oplossing (2) van het continue probleem overgaat.

Het staat ons nog vrij de lengtemaat s te definiëren. Wij kiezen als lengte van één sectie $\Delta s = 1$ en noemen de lengtemaat s vervolgens n ter onderstreping van het feit, dat deze grootte slechts discrete waarden aanneemt. De vergelijking (5) wordt dan

$$i(n) = i(o) e^{-2n \operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{YZ}{4}}} \quad (6)$$

In het eenvoudigste geval $Z = j\omega L$ en $Y = j\omega C$ wordt nu

$$\begin{aligned} i(n) &= i(o) e^{-2n \operatorname{arsinh} j\omega \sqrt{\frac{LC}{4}}} = i(o) e^{-2jn \arcsin \omega \sqrt{\frac{LC}{4}}} = \\ &= i(o) e^{-2jn \arcsin \frac{\omega}{\omega_1}} = i(o) e^{-(\alpha j \beta)n}, \end{aligned} \quad (7)$$

waarin $\omega_1 = \sqrt{\frac{LC}{4}}$ en waarin α en β resp. damping en phase-draaiing per cel uitdrukken. Voor α en β vinden wij dus de vergelijking

$$j \frac{\omega}{\omega_1} = \sinh \frac{\alpha + j\beta}{2} = \sinh \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + j \cosh \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}.$$

Het reële deel moet gelijk nul zijn. Dit kan in de eerste plaats wanneer $\alpha = 0$, dan wordt

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \sin \frac{\beta}{2}, \quad \beta = 2 \arcsin \frac{\omega}{\omega_1}. \quad (8)$$

Dit kan blijkbaar alleen gelden voor frequenties ω kleiner dan ω_1 . Dit verleent $\omega_1 = \sqrt{\frac{4}{LC}}$ de beteekenis van een *grensfrequentie*.

De tweede mogelijkheid is $\beta = \pi$, dan wordt

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \cosh \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha = 2 \operatorname{arcosh} \frac{\omega}{\omega_1}. \quad (9)$$

Dit kan blijkbaar alleen gelden voor frequenties ω groter dan ω_1 . Voor frequenties ω beneden de grensfrequentie ω_1 is dus, evenals bij de ideale kabel, de damping identiek nul, de phase loopt aanvankelijk lineair, later steiler op, totdat zij bij de grensfrequentie de waarde π bereikt. Deze waarde blijft voor hogere frequenties behouden, nu begint de damping echter abrupt op te lopen (fig. 3). *De overgang van de continue naar de discrete kabel heeft geleid tot het optreden van een dempingsband boven de frequentie ω_1 .* Wij spreken van een laagdoorlatend filter van het grondtype. Voor zeer lage frequenties gaat de vergelijking (7) voor het laagdoorlatend filter over in die voor de continue kabel. De argelooze onderzoeker, die, gewapend met lage frequenties, dit filter zou bestudeeren, zou geen onderscheid met de continue kabel constateeren, de atomistiek zou aan hem voorbijgaan. Eerst wanneer hij hogere frequenties bezigt, komt deze atomistiek tot uiting, aanvankelijk in het

sneller dan lineair oploopen van de phase, vervolgens in het optreden van damping en het verder constant blijven van de phase. Bij de grensfrequentie is de phasedraaiing per cel π , de golflengte langs het filter is dan dus gelijk aan de lengte van

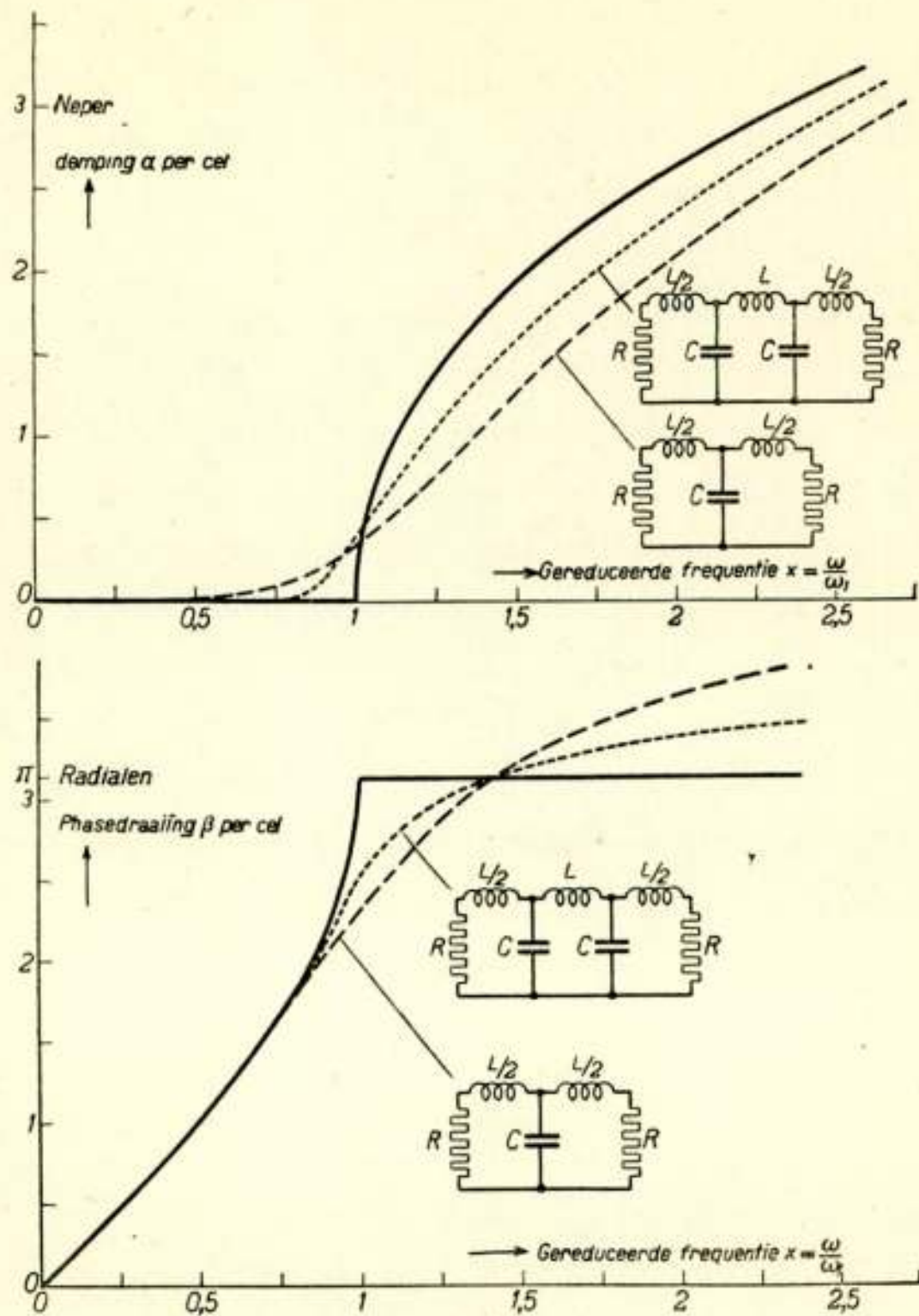


Fig. 3.

Damping (boven) en phasedraaiing (onder) per cel van het laagdoorlatende filter van het grondtype als functie van de frequentie.

———— afgesloten met de golfweerstand.

— — — — — één cel aan beide zijden afgesloten met een constante weerstand $R = \sqrt{L/C}$.

..... twee cellen aan beide zijden afgesloten met een constante weerstand $R = \sqrt{L_1/C}$.

twee cellen. Dit leidt tot de formuleering, dat de atomistiek zich eerst doet gelden voor die golven, waarvan de golflengte niet meer groot is ten opzichte van de lengte der cellen.

Bezien wij de formule (6) nog eens in haar algemeenheid, dan constateeren wij, dat voor een ideaal filter (waarvoor Y

en Z zuiver imaginaire grootheden zijn) de grootheid $YZ/4$ steeds zuiver reëel is.

Uit de vergelijking

$$\sqrt{\frac{YZ}{2}} = \sinh\left(\frac{\alpha + j\beta}{2n}\right) = \sinh \frac{\alpha}{2n} \cos \frac{\beta}{2n} + j \cosh \frac{\alpha}{2n} \sin \frac{\beta}{2n} \quad (10)$$

valt dan eenvoudig af te leiden, dat voor waarden $-1 < YZ/4 < 0$ een doorlatingsgebied ($\alpha = 0, \beta \neq 0$), voor de overige waarden een dempingsgebied ontstaat ($\alpha \neq 0, \beta$ een geheel veelvoud van π). *We zien dus, dat het samenklonteren van de continue verdeelde serieïmpedanties en paralleladmittanties van een kabel tot de discrete serieïmpedanties en paralleladmittanties van een filter leidt tot het optreden van één of meerdere dempings- of absorptiebanden.*

Het behoeft ons niet te verwonderen dat geheel analoge verschijnselen bijv. optreden bij het voortplanten van golven door materie. De atomaire opbouw der materie heeft op de golfvoortplanting een invloed die volkomen analoog is aan die van de discrete opbouw van de kabel. Wordt, voor zeer hoge frequenties, de golflengte kleiner dan tweemaal de roosterafstand der atomen, of de afstand van deeltjes in een poeder-vormige massa, dan treden op een zelfde wijze als hier beschreven, dempingsverschijnselen op.

§ 3. *Het eindige filter als eindig medium.*

Willen wij de eigenschappen leeren kennen van het eindige filter, dat slechts uit enkele cellen bestaat, dan moeten wij deze eindigheid interpreteren in de hierboven ontwikkelde voorstelling van de golfvoortplanting. Daartoe moeten wij het medium waarin de voortplanting plaats vindt, hetzij de continue dan wel de discrete kabel, behalve door de voortplantingsconstante kenschetsen door een tweede grootheid: *de golfweerstand*. Deze golfweerstand Z_f op een bepaald punt in een oneindig lange kabel is per definitie de verhouding tusschen spanning en stroom in dat punt

$$Z_f = \frac{e}{i}. \quad (11)$$

Plant zich een golf van één medium naar een ander medium met andere golfweerstand voort, dan is aan beide zijden van het grensvlak de golfweerstand, dus de verhouding tusschen

stroom en spanning, verschillend. Aan de grensvoorwaarden, dat stroom en spanning geen sprong mogen vertoonen, kan dus niet worden voldaan.

Nemen wij echter vanuit het grensvlak tevens een teruglopende golf aan, dan kunnen wij wel aan de grensvoorwaarden voldoen. Aan de overgang van twee media met verschillende

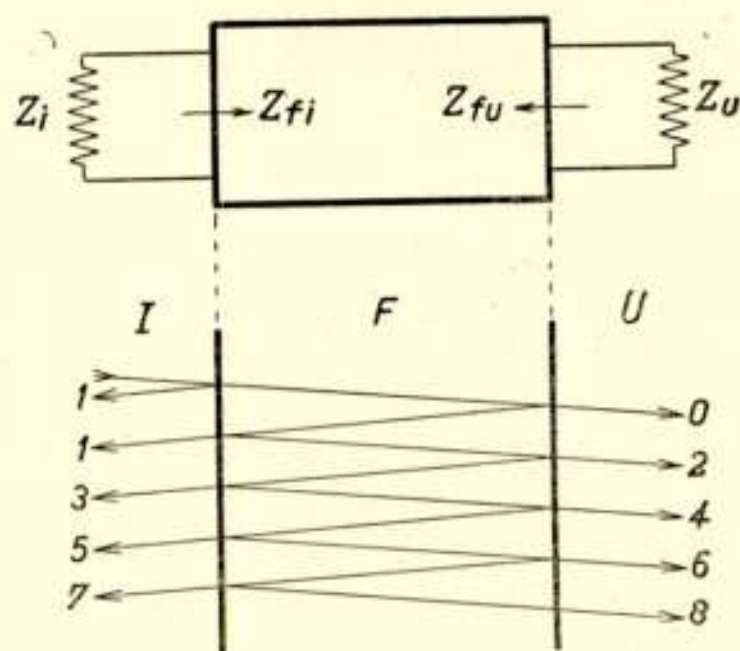


Fig. 4.

Analogie tusschen het eindige filter en de golfvoortplanting door verschillende media.

Boven : Filter met ingangs- en uitgangsimpedantie resp. Z_{fi} en Z_{fu} en afsluitimpedanties resp. Z_i en Z_u .

Beneden: Stralengang bij voortplanting van een golf vanuit medium I via medium F naar medium U . Voor de duidelijkheid zijn de stralen onder een kleine hoek met de horizontale lijn geteekend.

golfweerstand treedt dus een gereflecteerde golf op. De mate van reflectie wordt uitsluitend bepaald door de verhouding der beide golfweerstand en niet door de voortplantingsconstante.¹⁾

Wanneer wij nu de eigenschappen willen leeren kennen van het eindige filtersegment, moeten wij dit aldus formuleeren, dat het segment aan beide zijden niet meer met de golfweerstand

¹⁾ In de optica schrijft men dikwijls reflectie aan de grens van twee media toe aan het verschil in brekingsindex n . Dit is principieel gesproken onjuist. De brekingsindex $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ komt overeen met de voortplantingsconstante, hierin stelt ϵ de diëlectrische constante, μ de magnetische permeabiliteit voor. De grootte n bepaalt wel de voortplantingssnelheid doch niet de reflectie. Deze reflectie wordt bepaald door de golfweerstand $Z_f = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$. Aangezien echter bij optische media de magnetische permeabiliteit practisch gelijk 1 is, kan men straffeloos de brekingsindex voor de reflectie verantwoordelijk stellen.

doch met andere impedanties is afgesloten. Het geldt hier dus de behandeling van een golf, die zich van het medium I (fig. 4) (de ingangsimpedantie) via het medium F (het filter) naar het medium U (de uitgangsimpedantie) voortplant.

Zooals fig. 4 doet zien, belandt in het medium U niet alleen de door twee reflecties verzwakte directe golf, doch eveneens een groep golven, die 2, 4, ... enz. reflecties hebben ondergaan. Deze bijdrage tot de demping, die al naar de phase zowel positief als negatief kan zijn, pleegt men als interferentie-verlies (interaction loss) te betitelen ¹⁾.

Het is duidelijk, dat deze wijze van interpretatie fysisch allengs haar aanschouwelijkheid verliest, wanneer de verschillende gereflecteerde golven niet als afzonderlijke na elkaar komende verschijnselen zijn waar te nemen. Mathematisch blijft de methode natuurlijk altijd van kracht (3), zelfs al zou het filtersegment slechts uit drie of zelfs twee impedanties bestaan.

In vele gevallen heeft het echter zin de afzonderlijke golven ook mathematisch niet afzonderlijk tot uitdrukking te brengen. De vierpooltheorie levert ons dan, indien wij de effectieve voortplantingsconstante $T = a + jb$ en de voortplantingsconstante voor het oneindige filter $\Theta = a + j\beta$ noemen, de volgende formule

$$e^T = \cosh \Theta + \frac{1}{2} \left(\frac{Z_f}{R} + \frac{R}{Z_f} \right) \sinh \Theta. \quad (12)$$

Hierin zijn filter en afsluitweerstand aan in- en uitgangszijde symmetrisch ondersteld en is $Z_i = Z_u = R$ en $Z_{fi} = Z_{fu} = Z_f$ genoemd. Wij laten de behandeling van het meer algemeene geval, dat in- en uitgangszijde niet symmetrisch zijn, achterwege. Blijkbaar wordt $T = \Theta$ voor $Z_f = R$.

Wij zullen dit resultaat nu toepassen op het reeds genoemde laagdoorlatende filter. Voor één cel van dit filter (fig. 3) geldt, wanneer wij $x = \omega/\omega_1$ als *gereduceerde frequentie* invoeren, volgens (7)

$$\sinh \frac{\Theta}{2} = j \frac{\omega}{\omega_1} = jx, \quad (13)$$

¹⁾ In de optica treedt een zeer analoog gedrag op bij het etalon. Dit interferentie-apparaat van hoog oplossend vermogen bestaat uit twee evenwijdige halfdoorlatende zilveren spiegels. De herhaalde reflecties bepalen hier op soortgelijke wijze een versterken resp. uitdooven van de primaire lichtstraal.

$$\begin{aligned} \text{en dus } \sinh \Theta &= 2 jx \sqrt{1 - x^2} \\ \text{en } \cosh \Theta &= 1 - 2 x^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Voor het bepalen van de golfweerstand moeten wij eerst uitmaken op welke punten wij de coupures in cellen willen aanbrengen. Wij kiezen als voorbeeld de coupure in het midden van de serieimpedantie (T -cel). De filtertheorie geeft voor de golfweerstand de volgende uitdrukking (4)

$$Z_f = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - x^2}. \quad (15)$$

Hierin stelt $\sqrt{\frac{L}{C}}$ de golfweerstand voor, die de overeenkomstige continue kabel zou bezitten. De factor $\sqrt{1 - x^2}$ is aan de atomistiek te danken, zij bewerkstelligt dat Z_f slechts voor $x < 1$ reëel is en daarboven imaginair wordt. Slechts voor frequenties beneden de grensfrequentie kan het filter dus aan de ingangszijde energie opnemen (doorlaatband),

Kiezen wij als afsluitimpedantie een constante weerstand, dan is het duidelijk, dat het filter slechts voor één frequentie goed kan worden afgesloten. Kiezen wij $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$, dan is dit dus slechts voor de frequentie nul het geval. Slechts voor deze frequentie blijven damping en phase onveranderd, overal elders worden zij gewijzigd. Combinatie van de vergelijkingen (12), (14) en (15) leidt tot ¹⁾

$$\begin{aligned} a &= \ln \sqrt{1 + x^6} \text{ neper} = 10 \log (1 + x^6) \text{ dB} \\ b &= \arctg \frac{x(2 - x^2)}{1 - 2x^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Voor een filtersegment bestaande uit twee T -cellen vinden wij op soortgelijke wijze voor damping en phase per cel

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \ln \sqrt{1 + 4x^8 + 16x^6 - 16x^{10}} \\ b &= \frac{1}{2} \arctg \frac{2x(2 - 5x^2 + 2x^4)}{1 - 8x^2 + 8x^4}. \end{aligned} \quad (17)$$

Zooals fig. 3 doet zien, wijken de eigenschappen van een segment bestaande uit één cel, aan beide zijden afgesloten op

¹⁾ Op deze formules werd schrijver gewezen door Ir H. van de Weg van dit laboratorium.

de aangegeven wijze, nog tamelijk veel af van die van het oneindige filter. Van twee cellen zijn de afwijkingen reeds aanmerkelijk geringer. Voor een nog grooter aantal cellen zijn, behalve voor de grensfrequentie zelve, de afwijkingen geleidelijk te verwaarloozen klein. Dat bij de grensfrequentie de grootste afwijkingen optreden, behoeft ons niet te verwonderen, de filterimpedantie immers wordt hier volgens 15) gelijk nul, zoodat de reflectiecoëfficiënten een maximum bereiken.

§ 4. *De invloed der verliezen.*

De berekening van de eigenschappen van filters is een netelige zaak. Eenerzijds moet men, om tot numerieke gegevens te geraken, de moeizame weg der vlijtige berekening bewandelen. Anderzijds wil men toch, los van een dergelijke gedetailleerde berekening, een globaal inzicht verkrijgen in de invloed van de verschillende factoren, die hierbij een rol spelen. Dit treft wel het meeste bij de invloed, die de verliezen der afzonderlijke elementen op de gedragingen van het uiteindelijke filter uitoefenen.

Veronderstelt men namelijk, dat deze elementen vrij van verliezen zijn, dan kan men met de bekende numerieke en graphi-

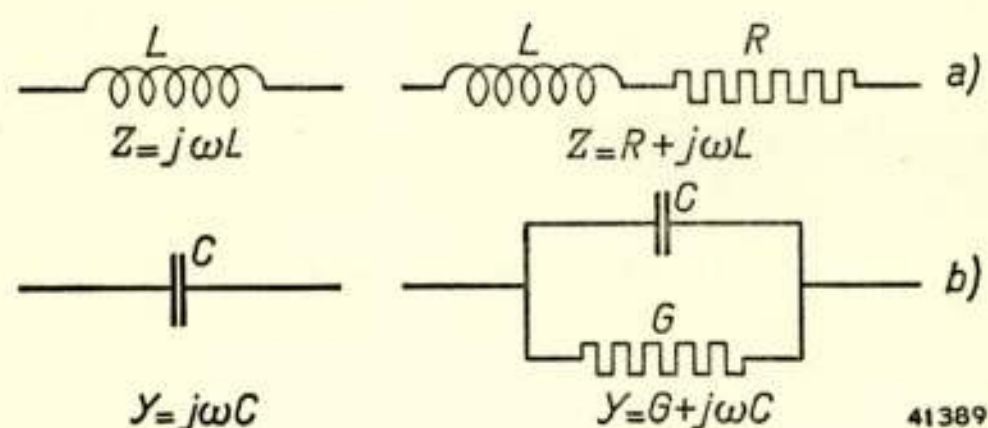


Fig. 5.

Vervangingsschema van de ideale (links) en de actueele elementen (rechts):

- a) de actueele zelfinductie is te beschouwen als een ideale zelfinductie L in serie met een reële weerstand R ,
- b) de actueele capaciteit is te beschouwen als een ideale capaciteit C parallel aan een reële afleiding G .

sche methoden betrekkelijk snel tot een resultaat geraken. In dit resultaat is de invloed der verliezen mathematisch weliswaar op eenvoudige wijze te verdisconteeren, de numerieke uitwerking echter wordt buitengewoon omslachtig.

We zullen nu laten zien, dat men op basis van een vereenvoudigende onderstelling, eenige zeer algemeene betrekkingen kan afleiden, die bovendien een aanschouwelijke interpretatie toelaten 5).

De ideale zelfinductie heeft een zuiver imaginaire impedantie, die van de actueele zelfinductie is complex. Deze complexe impedantie kunnen wij voorstellen als een verliesweerstand R in serie met de zelfinductie L (fig. 5). De impedantie wijzigt zich dus als volgt:

$$Z = j \omega L \rightarrow R + j \omega L. \quad (18)$$

Op dezelfde wijze kunnen wij de verliezen van een condensator voorstellen door een parallelweerstand over de condensator. De admittantie wijzigt zich dan als volgt

$$Y = j \omega C \rightarrow G + j \omega C, \quad (19)$$

waarin G de geleiding van de verliesweerstand voorstelt.

Wij schrijven de formules (18) en (19) nu in de volgende vorm

$$\left. \begin{aligned} Z &= R + j \omega L = \left(\frac{R}{L} + j \omega \right) L = (\varrho + j \omega) L \\ Y &= G + j \omega C = \left(\frac{G}{C} + j \omega \right) C = (\gamma + j \omega) C \end{aligned} \right\}. \quad (20)$$

De overgang van de ideale naar de actueele spoel komt dus, met behoud van de oorspronkelijke zelfinductie, neer op het vervangen van de imaginaire grootheid $j \omega$ door de complexe grootheid $\varrho + j \omega$. Hierin stelt $\varrho = R/L$ de *verliesmaat van de spoel* voor. Op dezelfde wijze komt de overgang van de ideale naar de actueele condensator, met behoud van de oorspronkelijke capaciteit, neer op het vervangen van de grootheid $j \omega$ door $\gamma + j \omega$, warin $\gamma = G/C$ de *verliesmaat van de condensator* voorstelt.

De vereenvoudigende veronderstelling, die wij nu invoeren, is, dat de verliesmaten van alle spoelen en condensatoren in het netwerk aan elkaar gelijk zijn. Deze verliesmaat noemen wij k . Aan deze veronderstelling is gewoonlijk niet voldaan. Gemeenlijk zijn weliswaar de verliesmaten der spoelen onderling gelijk en evenzoo die der condensatoren, doch is de verliesmaat der spoelen aanmerkelijk groter dan die der condensatoren. Men kan echter bewijzen dat men in dat geval voor k het gemiddelde van ϱ en γ moet nemen en dat een kleine correctie in de frequentie moet worden ingevoerd, die echter in de meeste gevallen is te verwaarloozen. Wij onderstellen voorts, dat R en G in het beschouwde frequentiegebied niet van de frequentie afhangen.

Baseeren wij ons nu op de grootheid $k = \varrho = \gamma$, dan kunnen wij de volgende conclusie trekken:

Zijn van een ideaal netwerk de eigenschappen als functie van de frequentie en van de waarden der onderscheidene zelfinducties en capaciteiten bekend, dan volgen daaruit onmiddellijk de eigenschappen van het actueele netwerk, dat met verliezen behept is, door in de formules de imaginaire grootheid $j\omega$ door de complexe grootheid $k + j\omega$ te vervangen.

Wordt dus een eigenschap van het ideale netwerk voorgesteld door een analytische functie van het argument $j\omega$, die wij $f(j\omega)$ willen noemen, dan wordt deze zelfde eigenschap voor het actueele netwerk voorgesteld door dezelfde functie van het complexe argument $k + j\omega$, dus door $f(k + j\omega)$.

Het filtertechnische probleem van het bepalen van de invloed der verliezen op de eigenschappen van een netwerk is hiermede dus teruggebracht tot het mathematische probleem van het bepalen van de waarden van een complexe functie f voor complex argument $k + j\omega$, wanneer de waarden voor imaginair argument $j\omega$ bekend zijn.

Dit probleem, waarvan de oplossing in de theorie der complexe functies is gegeven, zullen wij nu nader onder oogen zien. We zullen daarbij komen tot een viertal formuleringen, waarvan wij er drie nader zullen behandelen en waarbij wij de nadruk zooveel mogelijk op de aanschouwelijke interpretatie van de mathematische formulering zullen leggen.

De relaties, die wij daarbij zullen afleiden, zijn uit de aard der zaak niet beperkt tot de toepassing op elektrische netwerken, zij gelden voor alle lineaire systemen die als functie van de tijd veranderingen ondergaan, dus bijv. ook voor mechanische systemen.

§ 5. *De methode van de loodrechte afgeleide.*

Voor een eigenschap van het netwerk, die wij door de functie f voorstelden, kiezen wij de voortplantingsconstante $\Theta = \alpha + j\beta$. Er geldt dus

$$f(k + j\omega) = \alpha + j\beta \quad (21)$$

Voor een dergelijke complexe functie geldt, hetgeen men door differentieeren naar k resp. ω gemakkelijk kan verifieeren

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial k} &= \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \beta}{\partial k} &= -\frac{\partial \alpha}{\partial \omega} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Dit zijn de bekende differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann uit de theorie der functies van een complexe veranderlijke. Om ons hiervan een aanschouwelijk beeld te maken, denken we ons α en β als twee oppervlakken, die een functie zijn van de coördinaten k en ω . De relaties (22) betekenen, dat in twee overeenkomstige punten van de beide oppervlakken de helling van het oppervlak α in de k -richting gelijk is aan de helling van het oppervlak β in de ω -richting. Evenzoo is de helling van het oppervlak β in de k -richting gelijk aan de helling van het oppervlak α in de ω -richting, doch met het negatieve teeken. In het bijzondere geval dat ons thans interesseert, kennen wij van de beide oppervlakken slechts de waarde op de ω -as d.w.z. voor een verliesmaat $k = 0$. Wij wenschen de waarde van de oppervlakken te leeren kennen voor een waarde k , die een weinig van 0 afwijkt. De vergelijkingen (22) leeren ons nu, dat de *gezochte* verandering van α met k gelijk is aan de *bekend* veronderstelde verandering van β met ω en evenzoo dat de *gezochte* verandering van β met k gelijk is aan de *bekend* veronderstelde verandering van α met ω , echter met het negatieve teeken. De vergelijkingen (22) drukken dus relaties uit tusschen afgeleiden van de oppervlakken α en β , die zijn genomen in loodrecht op elkaar staande richtingen.

Door Taylorontwikkeling vinden wij: ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \alpha(k, \omega) &= \alpha(0, \omega) + k \frac{\delta \alpha(0, \omega)}{\delta k} = \alpha(0, \omega) + k \frac{\delta \beta(0, \omega)}{\delta \omega} \\ \beta(k, \omega) &= \beta(0, \omega) + k \frac{\delta \beta(0, \omega)}{\delta k} = \beta(0, \omega) - k \frac{\delta \alpha(0, \omega)}{\delta \omega} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

De „methode der loodrechte afgeleide” stelt ons dus in staat uit de bekende waarden van α en β op de ω -as ($k = 0$) de waarden in de onmiddellijke nabijheid daarvan ($k \neq 0$) af te leiden. Wij zullen dit nu aan eenige voorbeelden toelichten.

Als eerste voorbeeld nemen wij weer het laagdoorlatende filter van het grondtype (fig. 6). Om de invloed der verliezen op de demping te bepalen moeten wij dus het verloop van $\beta(\omega)$ in oogenschouw nemen. Voor lage frequenties loopt β

¹⁾ De eerste aanduiding van deze relatie is te vinden bij H. F. Mayer 6); E. A. Guillemin 7) wees er op, dat de relaties berusten op de theorie der complexe functies.

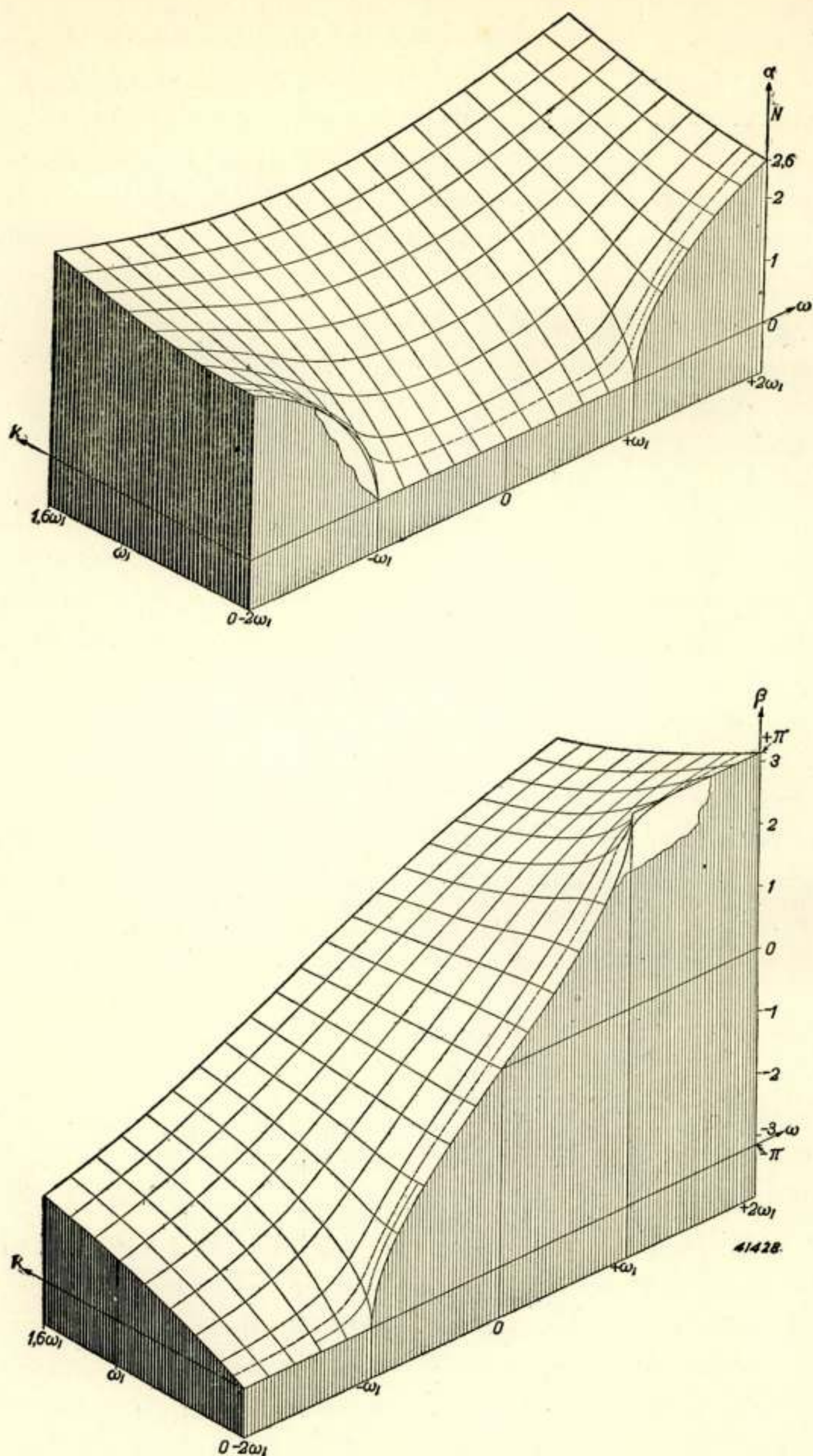


Fig. 6.

Getekende modellen van de damping $\alpha(k, \omega)$ (boven) en de phase $\beta(k, \omega)$ (onder) van het laagdoorlatende filter van het grondtype. De modellen gelden bij benadering ook voor een smal banddoorlatend filter van het grondtype wanneer bij alle frequenties de gemiddelde frequentie ω_0 van het doorlaatgebied wordt opgeteld. De streeplijn geeft de waarde $k = 0.1\omega_1$, de stippellijn de waarde $k = 0.05\omega_1$ aan.

nagenoeg lineair op, de helling is constant, de verliesmaat k veroorzaakt dus een *constante* damping van het filter in het lage doorlaatgebied. Deze damping stijgt, naarmate de frequentie dichter bij de grensfrequentie komt, gezien de grootere helling van $\beta(\omega)$ in dat gebied. In het dempingsgebied echter wordt β plotseling constant. Hier heeft dus de verliesmaat in eerste benadering *geen* toename van de damping tengevolge.

Wat de invloed der verliezen op de phasedraaiing β betreft, beginnen wij met te constateeren, dat in het doorlaatgebied α constant is (en wel nul). Hier oefenen de verliezen dus in eerste benadering geen invloed uit op de phasedraaiing. Deze invloed begint eerst abrupt boven de grensfrequentie en vermindert dan geleidelijk. Door het negatieve teeken in de formule (22) daalt β onder invloed van k .

De constante toename van de damping in het doorlaatgebied is een belangrijke grootheid. Wij kunnen deze gemakkelijk in quantitatieve vorm brengen. Voor de afgeleide van β geldt in het lage doorlaatgebied

$$\frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \frac{2}{\omega_1}.$$

Onderstellen wij, dat de verliesmaat der condensatoren is te verwaarloozen, dan geldt $k = \varrho/2$ en derhalve

$$\alpha = k \frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \frac{R}{\omega_1 L} \text{ Neper/cel} \quad (24)$$

De damping is dus omgekeerd evenredig met de breedte van het filter.

Als tweede voorbeeld noemen wij het bandfilter van het grondtype. Dit is gewoonlijk met goede benadering te beschrijven als een verschoven laagdoorlatend filter, waarbij de grootheid ω_1 overgaat in de geheele of halve breedte van het bandfilter. Voor een filter van constante breedte wordt dus de damping in het doorlaatgebied bepaald door de verliesmaat der spoelen en condensatoren, onafhankelijk van de ligging van dit doorlaatgebied in de frequentieband. Dit is de reden, waarom wij voor zulke filters de spoelen liever karakteriseeren met de verliesmaat $\varrho = R/L$ dan met de veel gebruikte kwaliteit $Q = \omega L/R$. Ook voor bandfilters geldt algemeen, dat de damping omgekeerd evenredig is met de breedte van het filter.

§ 6. *De methode van het vliesmodel.*

Differentieeren van de vergelijkingen (22) naar k en ω leidt tot de volgende uitdrukkingen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 a}{\partial k^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial \omega^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \beta}{\partial k^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Dit zijn de bekende differentiaalvergelijkingen van Laplace die een voorwaarde aan de oppervlakken $a(k, \omega)$ resp. $\beta(k, \omega)$ opleggen.

De vergelijking doet denken aan de differentiaalvergelijking van het z.g. minimaal oppervlak, waarvan het klassieke voorbeeld het zeepvlies is. Deze vergelijking luidt

$$\left\{ 1 + \left(\frac{\partial a}{\partial \omega} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 a}{\partial k^2} - 2 \frac{\partial a}{\partial k} \cdot \frac{\partial a}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial k \partial \omega} + \left\{ 1 + \left(\frac{\partial a}{\partial k} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 a}{\partial \omega^2} = 0 \quad (26)$$

Kiezen wij de hellingen $\partial a / \partial k$ en $\partial a / \partial \omega$ klein, dan gaat de vergelijking in die van Laplace over. Voor zulke kleine hellingen kan men dus een oppervlak, dat moet voldoen aan de differentiaalvergelijking van Laplace, met voldoende benadering voorstellen door een zeepvlies. Ook mag men het oppervlak voorstellen door een elastisch membraan bijv. een rubbermembraan dat voor kleine hellingen door dezelfde vergelijking wordt benaderd 8). Dit leidt ons dus tot de volgendeanschouwelijke voorstelling. Kent men bijv. de demping a langs één of andere contour, ¹⁾ dan kunnen wij het daarbinnen gelegen oppervlak $a(k, \omega)$ verwezenlijken door van de contour een draadmodel te vervaardigen en daartusschen een zeepvlies aan te brengen. Behalve dat men met deze methode in beginsel de mogelijkheid heeft het geheele oppervlak a of β uit te meten, biedt zij meer globaal de mogelijkheid een gevoel te ontwikkelen voor de wijze, waarop de verliezen het verloop van a en β zullen beïnvloeden.

Herinneren wij ons bijv. het feit, dat bij het laagdoorlatend

¹⁾ Wij hebben a slechts langs de ω -as bekend ondersteld. Gewoonlijk echter is a ook langs eenige andere lijnen (b.v. de k -as of een cirkel op groote afstand van het middelpunt $k=0, \omega=0$) exact of benaderd aan te geven.

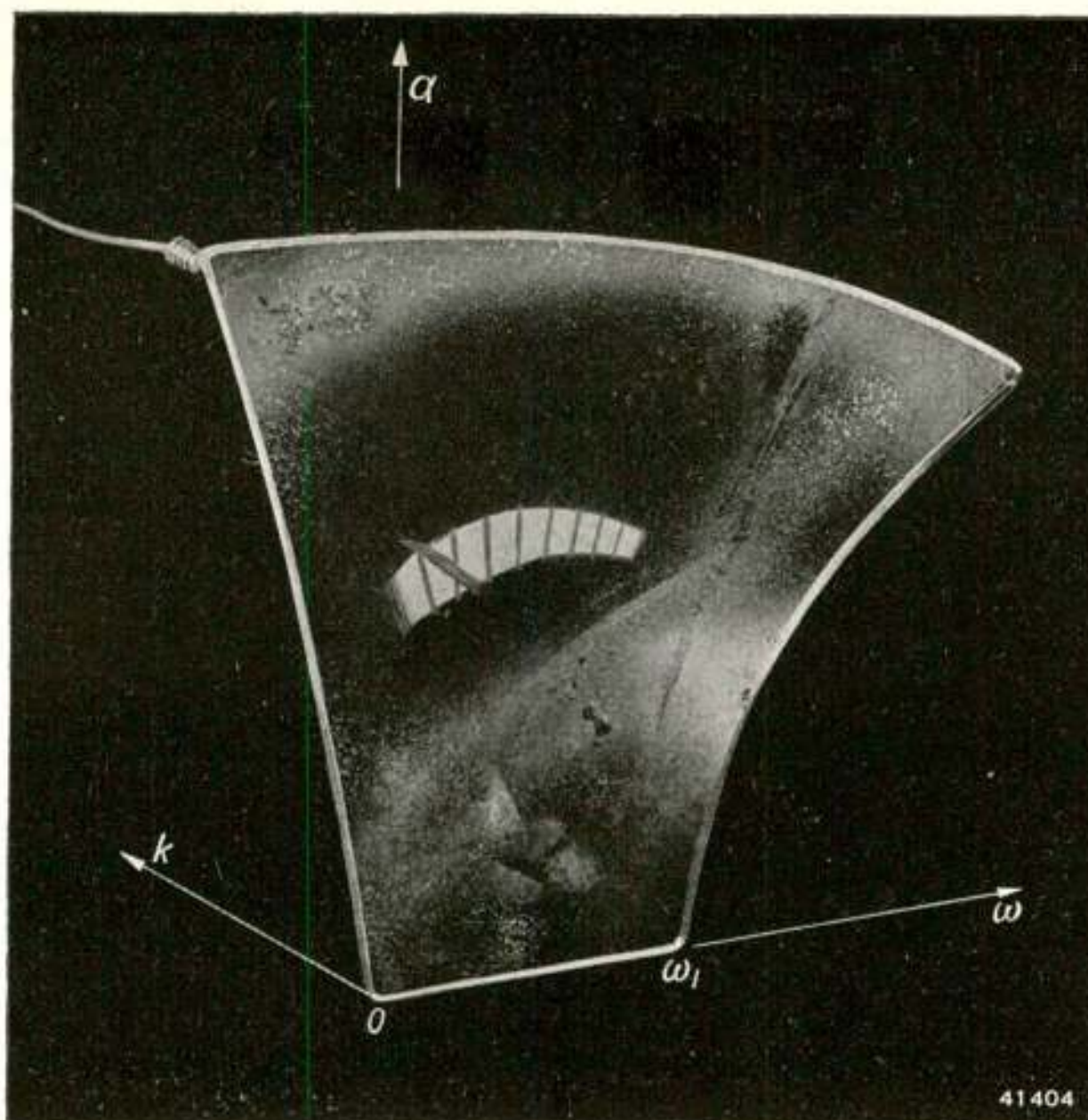


Fig. 7.

Zeepvliesmodel van de demping $\alpha(k, \omega)$ voor het laagdoorlatende filter van het grondtype (verg. fig. 6).

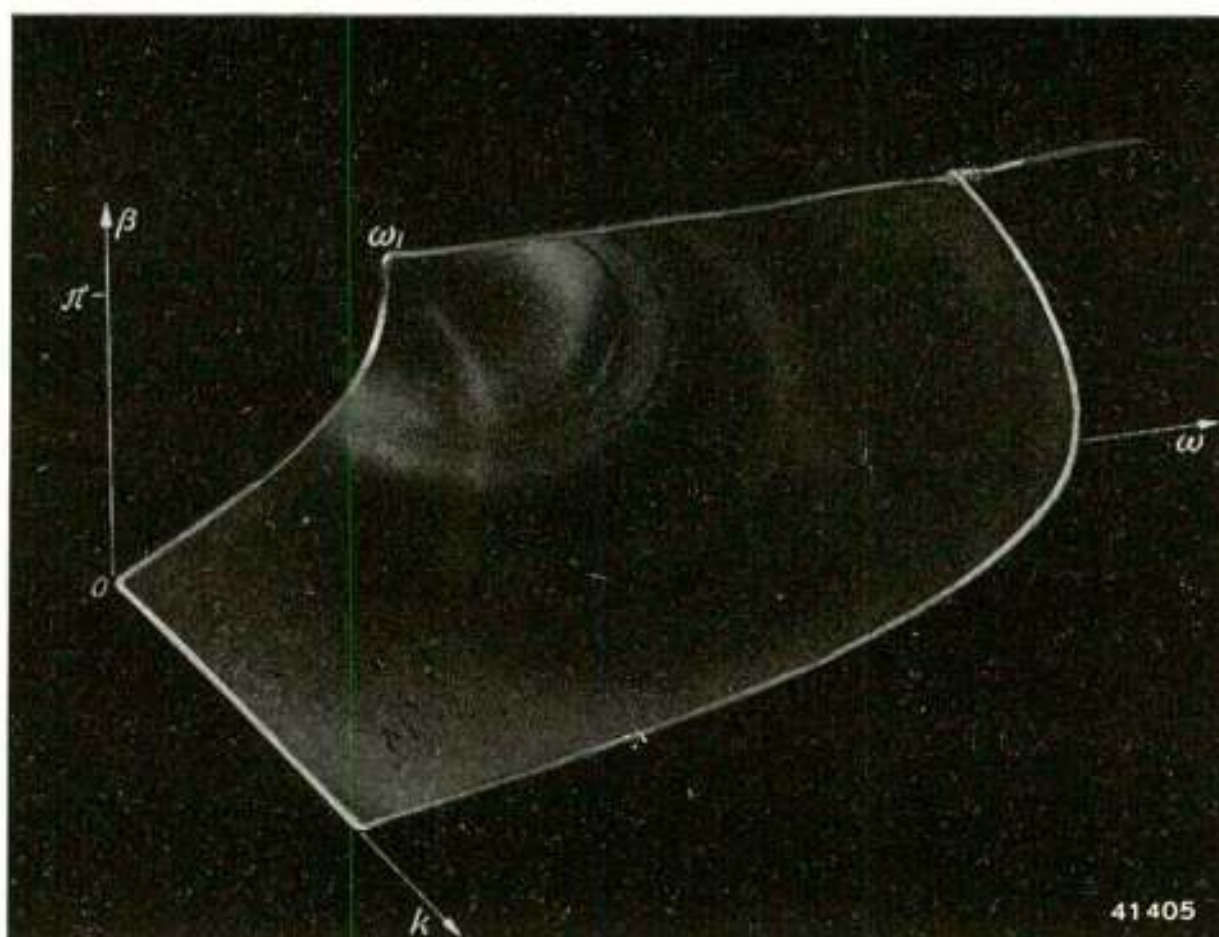


Fig. 8.

Zeepvliesmodel van de phase $\beta(k, \omega)$ voor het laagdoorlatende filter van het grondtype (verg. fig. 6). De coördinaat k is hier ter wille van de duidelijkheid van het vlies naar voren gekozen.

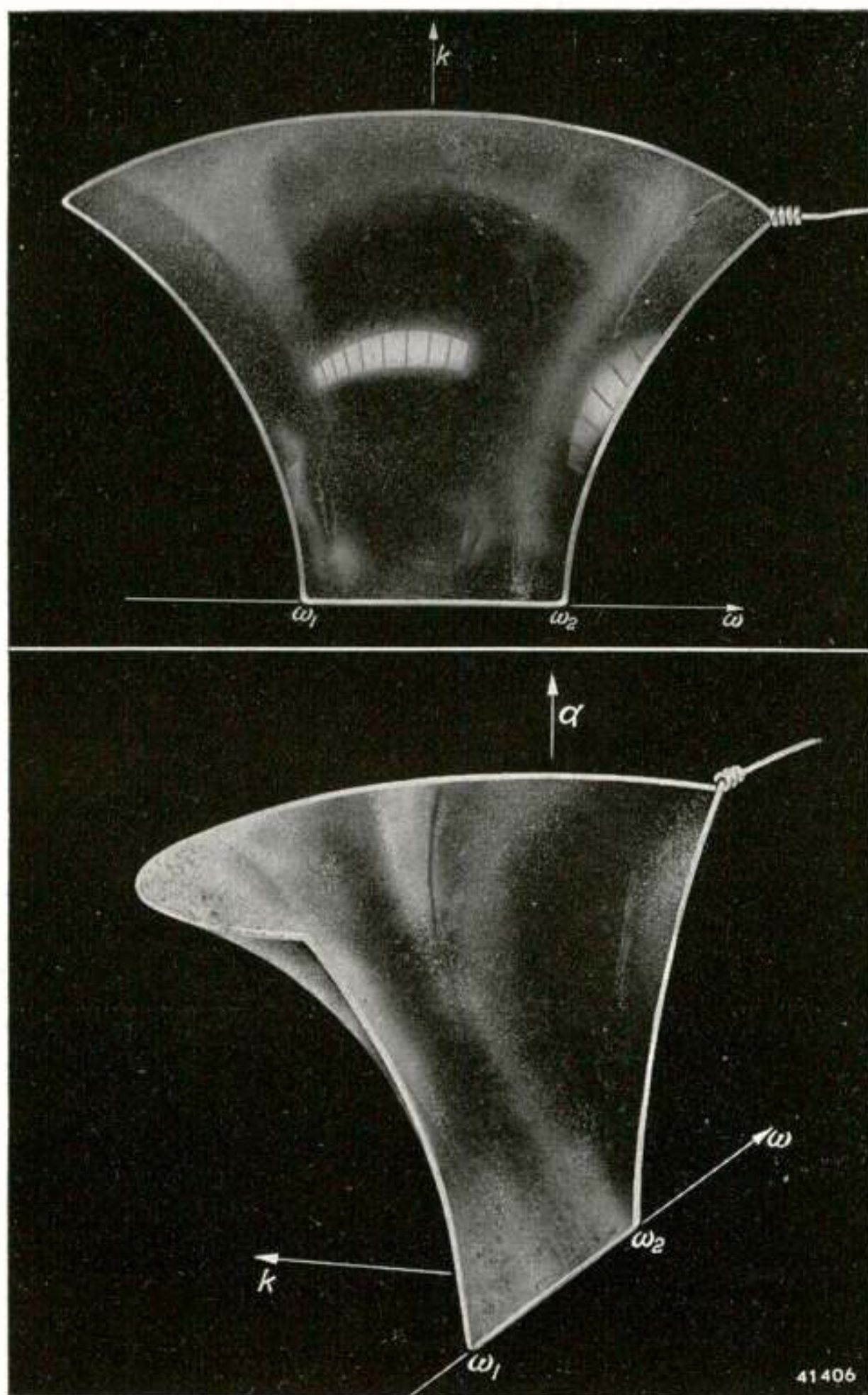


Fig. 9.
 Zeepvliesmodel van de demping $\alpha(k, \omega)$ van het banddoorlatende
 filter van het grondtype (verg. fig. 6).

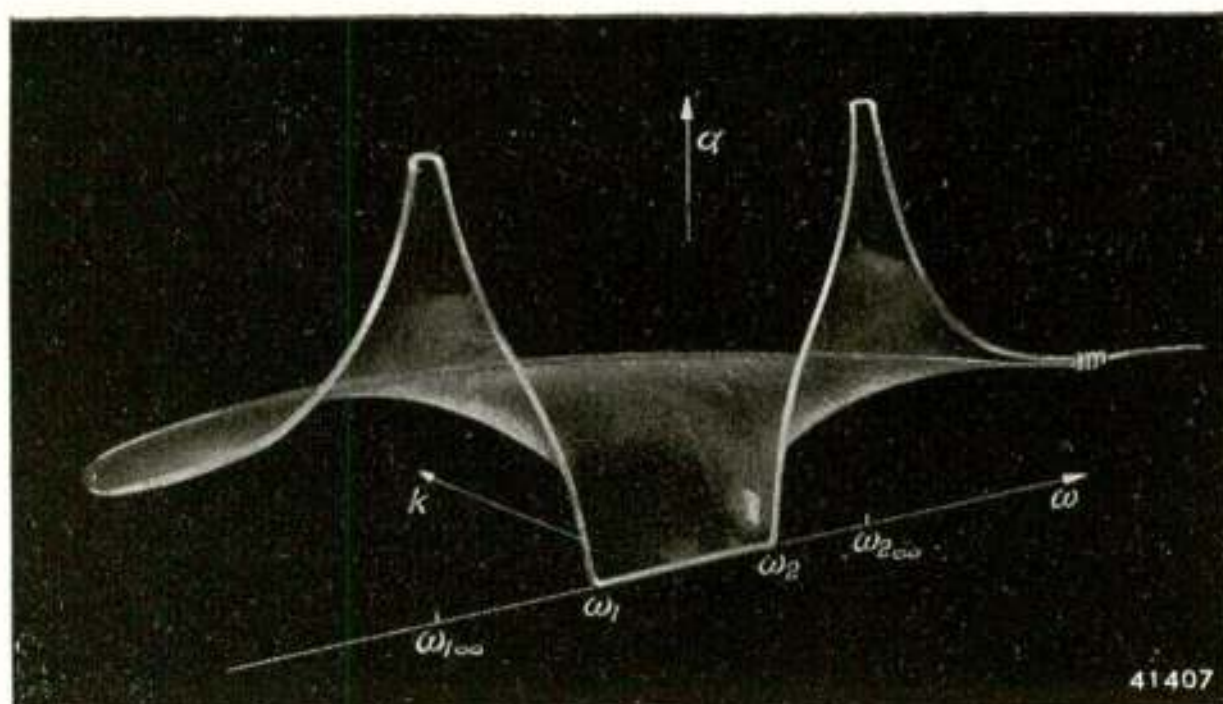


Fig. 10.
 Zeepvliesmodel van de demping $a(k, \omega)$ van het banddoorlatende filter van het getransformeerde type.

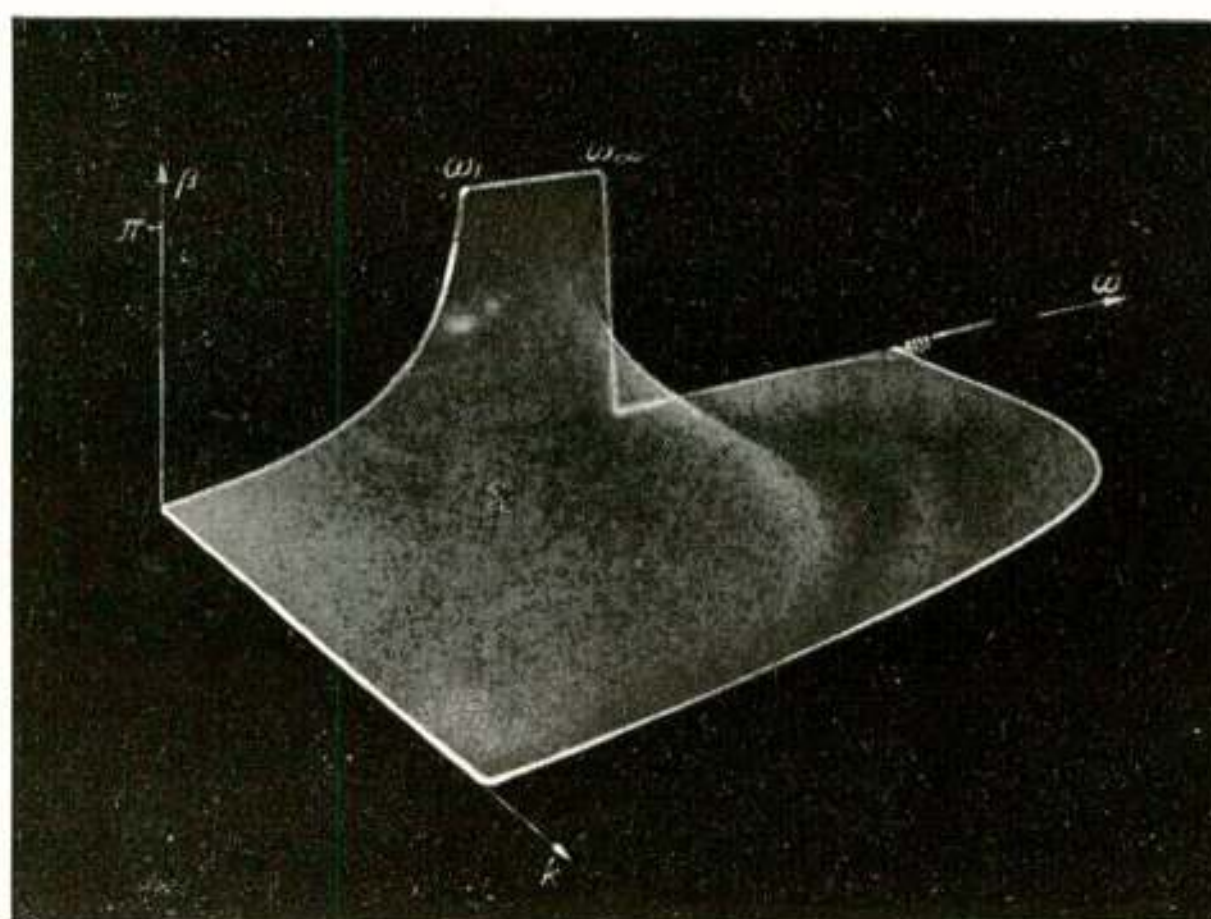


Fig. 11.
 Zeepvliesmodel van de phase $\beta(k, \omega)$ van het laagdoorlatende filter van het getransformeerde type. De coördinaat k is hier evenals in fig. 8 naar voren gekozen.

filter van het grondtype de toename van de demping nabij de grensfrequentie stijgt. Een gevoel voor de eigenschappen van een zeepvlies maakt ons dit gedrag onmiddellijk duidelijk. Het dempingsgebied trekt immers in het nabije doorlaatgebied het vlies relatief sterker omhoog.

In de figuren 7—11 geven wij eenige reproducties van zeepvliesmodellen weer, voor nadere bijzonderheden waarvan wij naar de oorspronkelijke publicatie 5) verwijzen. Het is wel opmerkelijk, wanneer men de modellen van fig. 7—9 vergelijkt met de berekende oppervlakken (fig. 6), dat aan de overeenstemming zoo weinig ontbreekt. Bij de grensfrequentie treden namelijk zelfs hellingen oneindig op, zoodat aan de voorwaarde waarop vergelijking (26) in (25) overgaat allerm minst is voldaan. In de practijk blijkt echter het zeepvlies zelfs in die gevallen nog een zeer redelijke benadering te verschaffen.

Voor numerieke berekening, bijv. van het gedrag van het filter nabij de grensfrequentie, kan men behalve van de vergelijkingen (25) ook met vrucht gebruik maken van de analoge relaties

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 k}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial \beta^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

die onmiddellijk zijn af te leiden door niet $a + j\beta$ als functie van $k + j\omega$, doch omgekeerd $k + j\omega$ als functie van $a + j\beta$ op te vatten. Bij de grensfrequentie immers worden de afgeleiden van a en β naar k en ω oneindig, zoodat de relaties (22) en (25) hun zin verliezen. In dit geval heeft het zin k en ω als functie van a en β te beschouwen en vergl. (27) te bezigen.

Door verdere differentiaties zijn uit de differentiaalvergelijkingen van Laplace (25) relaties van hooger orde af te leiden bijv.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^3 a}{\partial k^3} + \frac{\partial^3 \beta}{\partial \omega^3} &= 0 & \frac{\partial^4 a}{\partial k^4} - \frac{\partial^4 a}{\partial \omega^4} &= 0 \\ \frac{\partial^3 \beta}{\partial k^3} - \frac{\partial^3 a}{\partial \omega^3} &= 0 & \frac{\partial^4 \beta}{\partial k^4} - \frac{\partial^4 \beta}{\partial \omega^4} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

zoodat wij de Taylorontwikkeling (23) nu volledig kunnen uitbreiden tot

$$\begin{aligned}
 \alpha(k, \omega) &= \alpha(0, \omega) + k \frac{\partial \beta(0, \omega)}{\partial \omega} - \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 \alpha(0, \omega)}{\partial \omega^2} - \\
 &\quad - \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 \beta(0, \omega)}{\partial \omega^3} + \frac{k^4}{4!} \frac{\partial^4 \alpha(0, \omega)}{\partial \omega^4} + \dots \\
 \beta(k, \omega) &= \beta(0, \omega) - k \frac{\partial \alpha(0, \omega)}{\partial \omega} - \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 \beta(0, \omega)}{\partial \omega^2} + \\
 &\quad + \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 \alpha(0, \omega)}{\partial \omega^3} + \frac{k^4}{4!} \frac{\partial^4 \beta(0, \omega)}{\partial \omega^4} - \dots
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

§ 7. *De methode van het uitsmeren.*

Tenslotte willen wij een derde methode zeer summier aangeven.

De derde fundamentele relatie uit de theorie der [complexe functies is de contourintegraal van Cauchy

$$f(p) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{f(z)}{z-p} dz \tag{30}$$

Deze integraal brengt mathematisch tot uitdrukking, wat wij in de vorige paragraaf reeds in model zagen, nl. dat de waarde van de complexe functie f in een bepaald punt p te berekenen is, wanneer de functie $f(z)$ langs eenige contour rondom dat punt is gegeven.

De integraal van Cauchy laat ons echter zien, dat de mate, waarin de verschillende waarden langs de contour van $f(z)$ bijdragen tot $f(p)$, afhankelijk is van de afstand $z-p$ in die zin, dat de hoofdbijdrage door nabije punten zal worden geleverd. Wat de vorm betreft is (30) zeer nauw verwant aan de integraal, die in de optica het verband tusschen het onscherpe beeld en het scherpe voorwerp aangeeft. Ontwerpt men, bijv. door een camera die ontsteld is, een onscherp beeld van een voorwerp, dan beteekent dit, dat de hoeveelheid licht in een bepaald punt van het beeld niet wordt bepaald door één punt van dat voorwerp, doch eveneens door naburige punten, zij het met verschillend gewicht. Een enkel lichtpunt zal worden afgebeeld als een lichtvlekje, een abrupte sprong in helderheid als een geleidelijke overgang. Het beeld is „uitgesmeerd of „gedeformeed”.

De integraal van Cauchy impliceert, dat de waarde van

de functie f nabij de imaginaire as een uitsmering is van de waarde van die functie op de imaginaire as. De relatie is echter niet zoo simpel als in menig optisch geval, omdat men daar veelal met reële, hier echter met complexe functies heeft te doen. In groote trekken blijft echter het algemeen karakter behouden en wij begrijpen nu de „vervagende” invloed van de verliezen op de karakteristiek van een filter, waardoor pieken worden uitgesmeerd tot verbrede toppen en abrupte sprongen uitvloeien tot geleidelijke overgangen. De mate van verbreeding, uitgedrukt in de hoekfrequentie, is van de orde van k . De relatieve verbreeding is dus van de orde k/ω_1 , welke grootheid, wanneer de spoelen de hoofdzaak van het verlies bepalen, omgekeerd evenredig is met de reeds genoemde kwaliteit Q .

§ 8. *De invloed der verliezen bij het eindige filter.*

Tot dusverre zijn wij in deze voorbeelden van de invloed der verliezen steeds uitgegaan van de ideale karakteristiek van het oneindig lange filter. In de praktijk hebben wij echter steeds met een eindig segment van een dergelijk filter te maken. Kunnen wij nu de invloed der verkeerde afsluiting, waarop het nemen van een dergelijk segment neerkomt, ook in aanmerking nemen bij het bepalen van de invloed der verliezen? Dit blijkt op zeer eenvoudige wijze het geval te zijn.

De afsluitimpedanties behooren namelijk tot het netwerk, waarvoor wij de invloed der verliezen hebben bepaald. De eenige voorwaarde, die wij dus moeten stellen, is, dat eventuele zelfinducties en capaciteiten, die in de afsluiting zijn opgenomen, met dezelfde verliezen zijn behept als de L 's en C 's in het filter. Bestaat de afsluitimpedantie uit een simpele weerstand, dan blijft deze onveranderd. De werkwijze is dus de volgende: men bepaalt voor het verliesvrije filter de damping en de phase met in aanmerking nemen van de afsluitimpedantie volgens § 3. Voor de aldus verkregen damping a en phase b gelden zonder meer de relaties van § 5, 6 en 7. Als voorbeeld is in fig. 12 het gedrag van een cel van een laagdoorlatend filter van het grondtype weergegeven.

§ 9. *Het verband tusschen damping en phase.*

Een nader overdenken van de resultaten, die wij in de paragrafen 5—7 hebben afgeleid, voert ons tot een merkwaardig

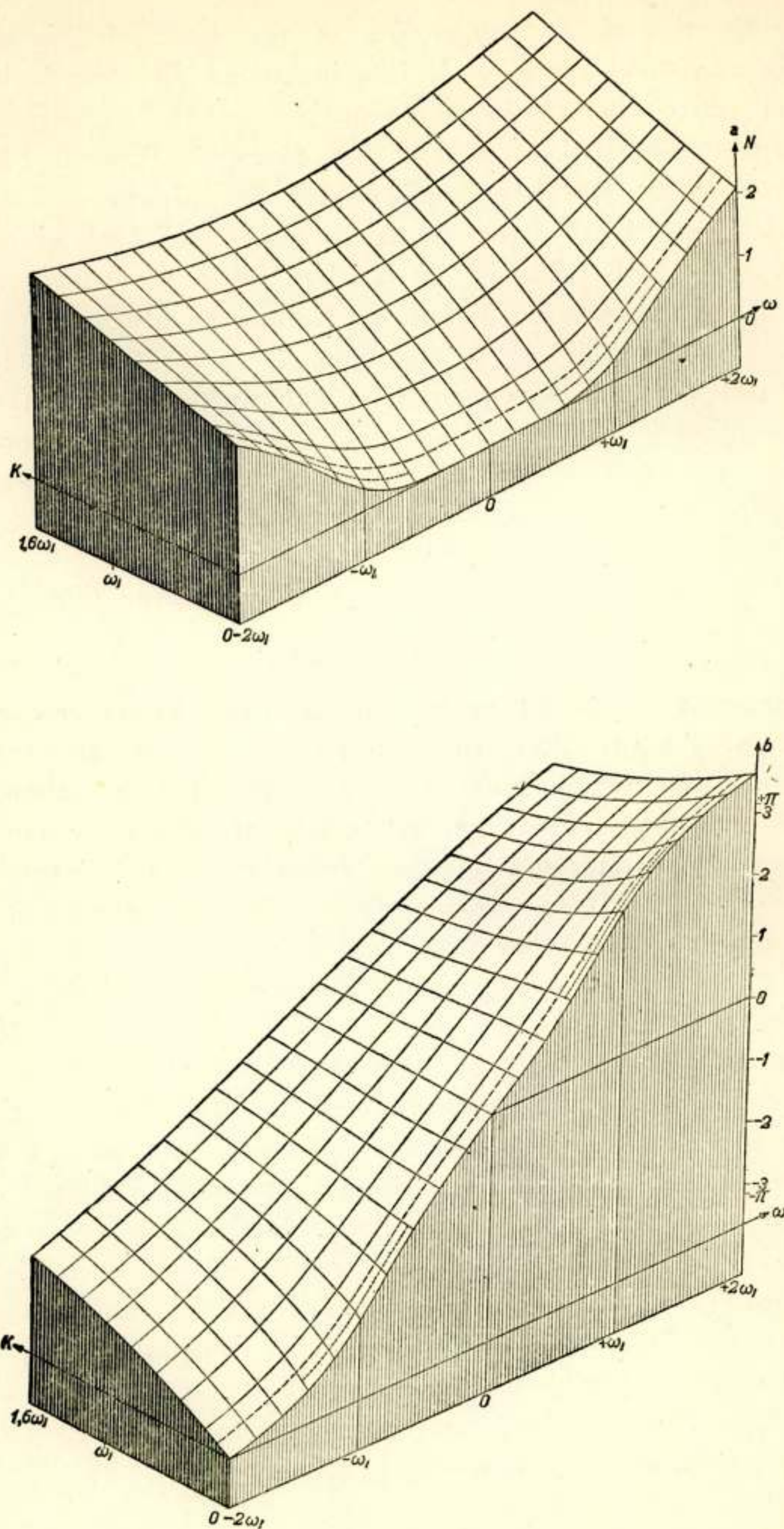


Fig. 12.

Geteekende modellen van de damping $a(k, \omega)$ (boven) en de phase $\beta(k, \omega)$ (onder) van het laagdoorlatende filter van het grondtype bij afsluiten van één cel met de weerstand $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ (verg. fig. 6 en 3).

De streeplijn geeft de waarde $k = 0,1 \omega_1$, de stippellijn de waarde $k = 0,05 \omega_1$ aan.

resultaat. Bij de methode van de loodrechte afgeleide immers toonden wij aan, dat de invloed der verliezen bijv. op de demping is te bepalen uit het gedrag van de phase als functie van de frequentie. Bij de methode van het vliesmodel daarentegen lieten wij zien, dat de demping binnen een contour is te bepalen uit het gedrag van de demping op die contour, zonder dat daarbij eenige kennis van het gedrag van de phase noodzakelijk is. Daarmede echter weer in tegenstelling lieten wij bij de methode van het uitsmeren zien, dat de complexe overdrachtsfunctie binnen een contour te bepalen is uit het gedrag van die functie op de contour. Voor het kennen van de demping binnen de contour is dan zoowel een kennis van de demping als van de phase op het contour noodzakelijk.

Deze drie formuleeringen zijn slechts dan niet in tegenspraak, wanneer er een verband bestaat tusschen de demping en de phase, wanneer dus door het gedrag van de demping als functie van de frequentie de phase als functie van de frequentie is vastgelegd en omgekeerd.

Dit verband, dat, met zekere beperking, inderdaad bestaat, vindt zijn grondslag in de wetenschap, dat wanneer op eenig systeem als functie van de tijd een invloed wordt uitgeoefend, de uitwerking zich niet zal doen gelden alvorens deze invloed heeft plaats gevonden. Het verband berust dus op het postulaat, dat een gevolg eerst na een oorzaak kan optreden.

Wij zullen thans eerst aan de hand van een eenvoudig voorbeeld de beteekenis van dit postulaat toelichten. We beschouwen daartoe een capaciteit C die door een momentane stroomstoot wordt geladen, en die zich daarna over een parallelweerstand R ontlaadt.

De stroomstoot stellen wij voor door de bekende δ -functie, die voor alle waarden van t nul is behalve voor $t = 0$, waar zij oneindig is, terwijl het oppervlak van de aldus gevormde piek de waarde 1 heeft. Om van de formuleering in de tijd t over te gaan tot de formuleering in de frequentie ω , maken wij gebruik van de identiteit

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t d\omega \quad (31)$$

Deze formule brengt tot uitdrukking, dat $\delta(t)$ is te schrijven als een integraal over louter cosinusfuncties. Dit is te begrij-

pen, aangezien $\delta(t)$ een symmetrische functie is. Bovendien concludeeren wij uit het feit, dat de formule geen van ω afhankelijke factor bevat, dat alle frequenties in gelijke mate in $\delta(t)$ voorkomen.

Wij splitsen de complexe impedantie van het netwerk in een reëel en een imaginair gedeelte

$$Z(\omega) = \xi(\omega) - j\eta(\omega) \quad (32)$$

Men kan gemakkelijk aantonen, dat ξ een symmetrische, η een anti-symmetrische functie van ω is.

De spanning $V(t)$ wordt nu

$$V(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \xi(\omega) \cos \omega t d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \eta(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (33)$$

$$= S(t) + A(t) \quad (34)$$

Het eerste aandeel $S(t)$ van $V(t)$ is symmetrisch in de tijd gezien het symmetrisch karakter van $\cos \omega t$. Het tweede aandeel $A(t)$ van $V(t)$ is antisymmetrisch in de tijd, gezien het antisymmetrisch karakter van $\sin \omega t$.

De impedantie $Z(\omega)$ van de capaciteit C met de parallelweerstand R wordt gegeven door

$$Z(\omega) = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R - j\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (35)$$

Bijgevolg is

$$\xi(\omega) = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2}, \quad \eta(\omega) = \frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (36)$$

Voor het aandeel $S(t)$ vinden wij dus

$$S(t) = \frac{R}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{1 + \omega^2 R^2 C^2} d\omega = \frac{1}{2C} e^{-\frac{1}{RC}|t|}$$

en voor het aandeel $A(t)$

$$A(t) = \frac{R}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega R C \sin \omega t}{1 + \omega^2 R^2 C^2} d\omega = \frac{1}{2C} e^{-\frac{1}{RC}|t|} \text{Sign}(t)$$

(37)

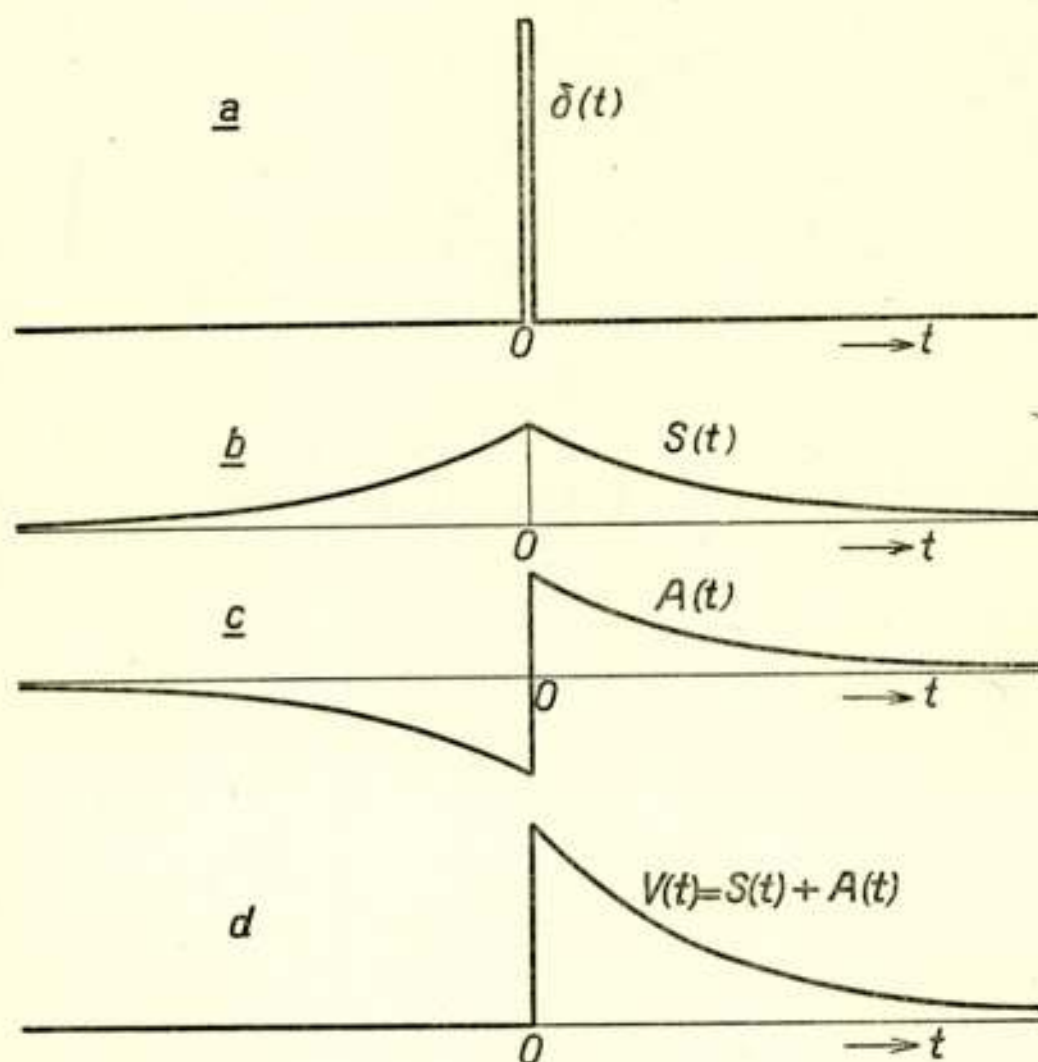


Fig. 13.

Inschakelverschijnsel van een door een weerstand overbrugde condensator

- a) de ingangsstroomstoot $\delta(t)$
- b) de uitgangsspanning $S(t)$ te danken aan het reële deel van de impedantie $\xi(\omega)$
- c) de uitgangsspanning $A(t)$ te danken aan het imaginaire deel van de impedantie $\eta(\omega)$
- d) de totale uitgangsspanning $V(t) = S(t) + A(t)$.

waarin de functie Signum t voor positieve t de waarde $+1$, voor negatieve t de waarde -1 heeft.

Zooals formule (37) en fig. 13 doen zien, zijn de beide bijdragen, wat de absolute waarde betreft, identiek. Voor negatieve tijden hebben zij echter een tegengesteld teeken, zoodat zij elkaar juist opheffen. Dus

$$\left. \begin{array}{lll} \text{voor } t < 0 & A(t) = -S(t) & V(t) = 0 \\ \text{voor } t > 0 & A(t) = S(t) & V(t) = 2A(t) = 2S(t) \end{array} \right\} \quad (38)$$

Het is nu duidelijk, hoe wij de relatie tusschen $\xi(\omega)$ en $\eta(\omega)$ moeten formuleeren. $\xi(\omega)$ en $\eta(\omega)$ geven aanleiding tot inschakelverschijnselen, die symmetrisch resp. antisymmetrisch zijn ten opzichte van $t = 0$. Om aan het postulaat der oorzakelijkheid te voldoen moeten de inschakelfuncties voor $t < 0$ elkaar volkomen opheffen. Daardoor zijn zij voor $t > 0$ exact aan elkaar gelijk. Er geldt dus voor $t > 0$

$$\left. \begin{aligned} V(t) &= 2 S(t) = 2/\pi \int_0^\infty \xi(\omega) \cos \omega t d\omega, \\ V(t) &= 2 A(t) = 2/\pi \int_0^\infty \eta(\omega) \sin \omega t d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

terwijl omgekeerd, volgens Fourier, geldt

$$\left. \begin{aligned} \xi(\omega) &= \int_0^\infty V(t) \cos \omega t dt \\ \eta(\omega) &= \int_0^\infty V(t) \sin \omega t dt \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Met behulp van de formules (39) en (40) kan men $\xi(\omega)$ en $\eta(\omega)$ ook onmiddellijk in elkaar uitdrukken, waarvoor verschillende formuleeringen bestaan.

De relatie tusschen het reële en het imaginaire gedeelte van een overdrachtsfunctie heeft eenerzijds een groote rol gespeeld bij elektrische netwerken 9). Zij treedt ook op bij het verband tusschen absorptie en dispersie in diëlectrische 10) en paramagnetische 11) media.

Tenslotte willen wij als voorbeeld nog het laagdoorlatende filter van het grondtype behandelen.

Voor één cel vonden wij

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 0 \text{ voor } \omega < \omega_1, & \alpha &= 2 \operatorname{arccosh} \omega/\omega_1 \text{ voor } \omega > \omega_1 \\ \beta &= 2 \operatorname{arcsin} \omega/\omega_1 \text{ voor } \omega < \omega_1, & \beta &= \pi \text{ voor } \omega > \omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

De overdrachtsfunctie wordt dus

$$\begin{aligned}
 \xi(\omega) - j\eta(\omega) &= e^{-\alpha - j\beta} = e^{-\alpha} \cos \beta - je^{-\alpha} \sin \beta \\
 &= \cos \left(2 \arcsin \frac{\omega}{\omega_1} \right) - j \sin \left(2 \arcsin \frac{\omega}{\omega_1} \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{voor } \omega < \omega_1 \text{ en} \\ \\ \end{array} \right. \\
 &= e^{-2 \operatorname{arccosh} \frac{\omega}{\omega_1}} \text{ voor } \omega > \omega_1
 \end{aligned} \quad (42)$$

Bijgevolg wordt 12)

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_1} \cos \left(2 \arcsin \frac{\omega}{\omega_1} \right) \cos \omega t d\omega - \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\infty} e^{-2 \operatorname{arccosh} \frac{\omega}{\omega_1}} \cos \omega t d\omega = \\
 &= \frac{J_2(\omega_1 t)}{|t|} \\
 \text{en} \\
 A(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_1} \sin \left(2 \arcsin \frac{\omega}{\omega_1} \right) \sin \omega t d\omega \\
 &= \frac{J_2(\omega_1 t)}{t}
 \end{aligned} \quad (43)$$

waarin $J_2(\omega_1 t)$ een Besselfunctie van de tweede orde voorstelt (fig. 14).

Naar wij mochten verwachten, heffen dus inderdaad voor negatieve tijden het symmetrische en het antisymmetrische gedeelte van het uitgangssignaal elkaar exact op. Voor positieve tijden geeft de δ -functie als ingangssignaal dus aanleiding tot het uitgangssignaal

$$V(t) = \frac{2 J_2(\omega_1 t)}{t} \quad (44)$$

Voor een willekeurig aantal cellen n vindt men langs dezelfde weg de bekende formule (2)

$$V(t) = \frac{2n J_{2n}(\omega_1 t)}{t} \quad (45)$$

Wat de invloed der verliezen op een dergelijk inschakelver-

schijnsel betreft, zij nog gewezen op een zeer eenvoudige relatie. Zijn nl. alle elementen van een netwerk behept met de verliesmaat k , dan wordt het inschakelverschijnsel $V_k(t)$ van het actuele netwerk in verband gebracht met het inschakelverschijn-

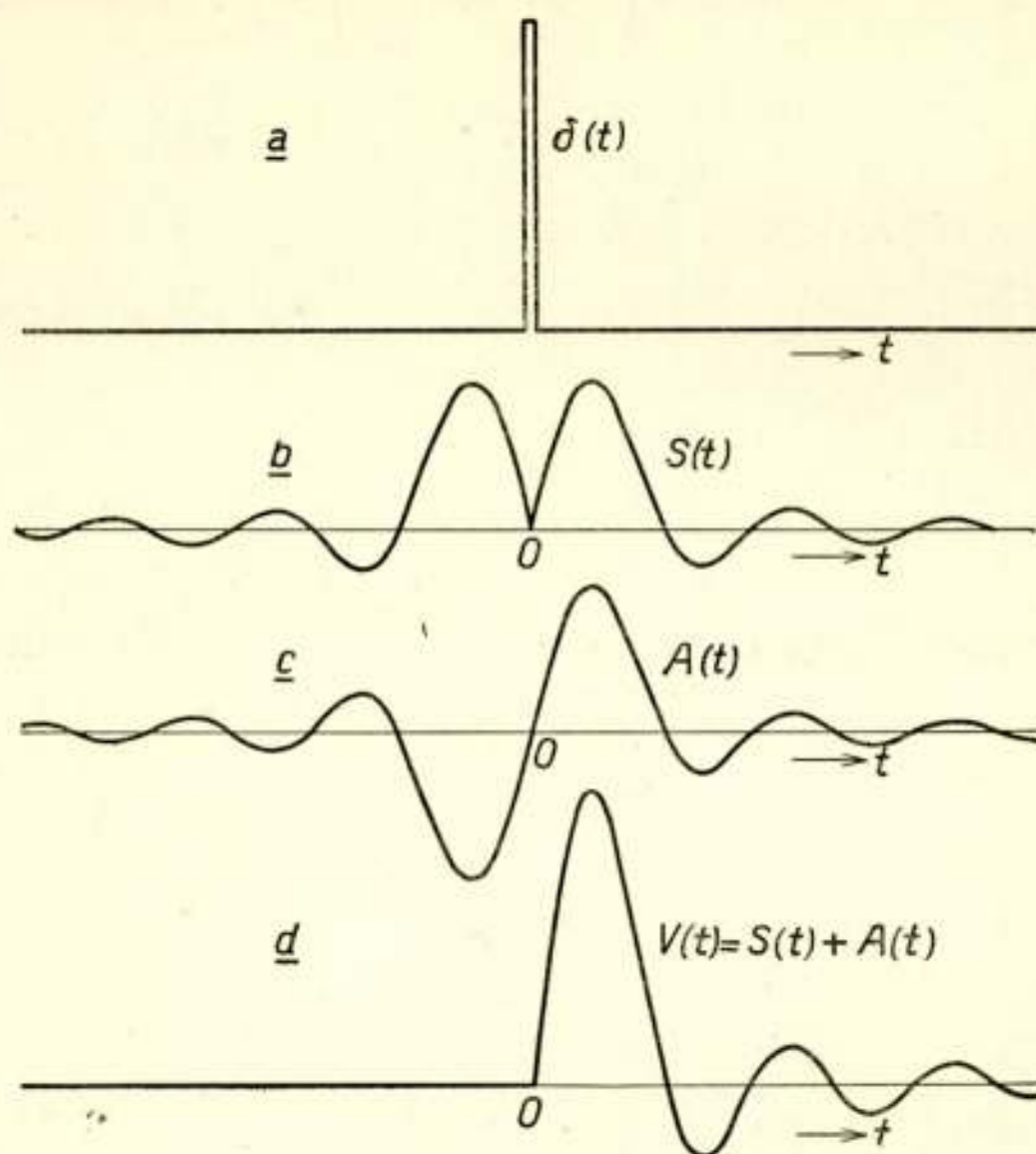


Fig. 14.

Inschakelverschijnsel na de eerste cel van een oneindig lang doorlatend filter van het grondtype

- a) de ingangsspanningsstoot $\delta(t)$
- b) de uitgangsspanning $S(t)$ te danken aan het reële deel van de overdrachtsfunctie $\xi(\omega)$
- c) de uitgangsspanning $A(t)$ te danken aan het imaginaire deel van de overdrachtsfunctie $\eta(\omega)$
- d) de totale uitgangsspanning $V(t) = S(t) + A(t)$.

sel $V_0(t)$ van het ideale netwerk door de simpele formule

$$V_k(t) = e^{-kt} V_0(t) \quad (46)$$

Een zeer eenvoudig voorbeeld van deze relatie treffen wij aan bij het zoo juist behandelde inschakelprobleem van de condensator. Is de parallelweerstand R oneindig, dan wordt de condensator door de stroomstoot $\delta(t)$ op $t = 0$ geladen tot de *constante* spanning $1/C$. Is de weerstand eindig, overeenkomende met een verliesmaat $k = 1/RC$, dan wordt de spanning volgens (45) vermenigvuldigd met $e^{-t/RC}$ in overeenstemming met (37).

Wanneer wij nu terugkomen op de schijnbare tegenspraak in de verschillende relaties, die wij in de §§ 5—7 hebben afgeleid, dan zien wij dus dat er inderdaad een relatie bestaat tussen a en β , zoodat het zoowel mogelijk zal zijn bijv. $a(k, \omega)$, uitsluitend met behulp van gegevens omtrent a , dan wel met behulp van gegevens omtrent zoowel a als β te bepalen.

De integraal van Cauchy is dus niet het volkomen mathematisch analogon van het vliesmodel. Bij het vliesmodel immers worden a en β gescheiden behandeld, bij de integraal van Cauchy gezamenlijk. De mathematische formuleering van het vliesmodel voert tot het bekende inwendige probleem uit de potentiaaltheorie in het platte vlak. Deze vierde methode hebben wij echter niet in een zoo aanschouwelijke vorm als de drie overige methoden kunnen gieten, zoodat wij een nadere uitwerking van deze methode achterwege lieten.

Eindhoven, 20 Juni 1944.

LITERATUUR

- 1) Zie bijv. B. D. H. Tellegen, T. Ned. Radiogen. **X**, 147, 1943.
- 2) B. van der Pol, J. Inst. El. Eng. **81**, 381, 1937.
- 3) W. Nijenhuis, Physica **9**, 817, 1942.
- 4) Voor een samenvattend overzicht der gebruikelijke filtertechniek zij bijv. verwezen naar:
I. E. Shea, Transmission Networks and Wave Filters, 1929.
B. van der Pol en Th. J. Weijers, Philips Techn. T. **1**, 1936.
- 5) J. F. Schouten en J. W. Klute, Philips Techn. T. **7**, 138, 1942.
- 6) H. F. Mayer, ENT **2**, 335, 1925.
- 7) E. A. Guillemin, Communication Networks **II**, 445, 1935.
- 8) P. H. J. A. Kleynen, Philips Techn. T. **2**, 338, 1937.
- 9) J. R. Carson, Electric Circuit Theory and the Operational Calculus 178, 1926.
Y. W. Lee, J. Math. Ph. **11**, 83, 1932.
Voor nadere details vooral in verband met complexe integratiewegen en voor verdere literatuurverwijzingen, zie
W. Nijenhuis en F. L. Stumpers, Physica **8**, 289, 1927.
- 10) H. A. Kramers, Nature **117**, 775, 1925. Atti-Congr. Int. Fisisi **II**, 545, 1927.
- 11) C. J. Gorter en R. Kronig, Physica **3**, 1009, 1936.
- 12) G. W. Watson, Bessel functions 405, 1922.

DISCUSSIE

Ir F. de Fremery: Hoe is quantitatief het effect van de slechte diëlectrica die tegenwoordig moeten worden toegepast? Hoe hoog liggen de karakteristieken daarvoor op de getoonde oppervlakken?

Dr J. F. Schouten: Over het algemeen is de verliesmaat der condensatoren een grootte-orde kleiner dan die der spoelen. Wat de totale verliesmaat betreft, komt men zelden boven een waarde $k = 0,1 \omega_1$ uit (op de oppervlakken van fig. 6 en fig. 12 door gestreepte lijnen aangegeven).

Ir F. H. Stieltjes: Hoe staat het, in verband met de door U afgeleide betrekkingen tusschen reële en imaginaire deel van complexe functies, met het bekende feit, dat, indien het reële deel van de logaritmische van een overdrachtsfunctie, meer bekend als „damping”, vast ligt als functie van de frequentie, er nog vele verschillende schakelingen kunnen worden gerealiseerd, die dit dempingsverloop hebben, doch die allen verschillen in het bijbehorende imaginaire deel, meer bekend als „phasedraaiing”?

Dr S.: Het gaat hier om een andere relatie dan de bovenbeschrevene tusschen reëel en imaginair deel van de overdrachtsfunctie $\xi(\omega) - j\eta(\omega)$, en wel om een relatie tusschen reëel en imaginair deel van de logaritmische $-a(\omega) - j\beta(\omega)$ van deze grootheid. In bijzondere gevallen is de relatie tusschen reëel en imaginair deel identiek met die bij de overdrachtsfunctie. In het algemeen is dit echter niet het geval, hiervan vormen bijv. netwerken met constante damping een voorbeeld. In die gevallen is de phase niet eenduidig uit het beloop van de damping af te leiden.